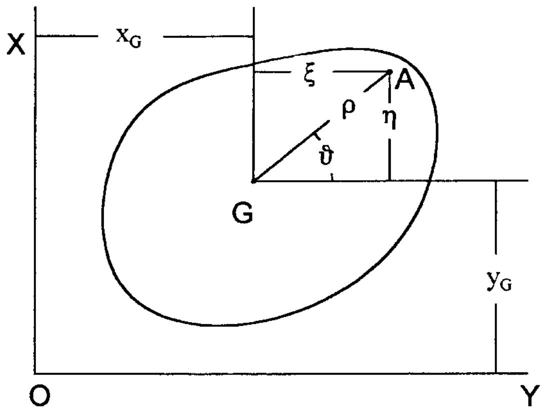
Il teorema del momento della quantità di moto per il moto piano

(Timoshenko & Young   Meccanica Applicata   Boringhieri)

Consideriamo un corpo, con baricentro **G**, che si muove nel piano ***xy***.



Definito un altro sistema di assi cartesiani **ξη**, paralleli rispettivamente a ***xy***, le coordinate di un punto generico **A** del corpo sono espresse dalle seguenti relazioni[1]:

$$x = x_G + x \qquad\qquad y = y_G + h \qquad\qquad [1]$$

Derivando le [1] rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{x} = \dot{x}_G + \dot{x} \qquad\qquad \dot{y} = \dot{y}_G + \dot{h} \qquad\qquad [2]$$

Il momento della quantità di moto, rispetto ad un punto **O**, di un punto di massa **dm** situato in **A** vale[2]:

$$dm\left(\dot{y}x - \dot{x}y\right) \qquad\qquad [3]$$

Sostituendo le [1] e [2] nella [3] si ha:

$$dm\left[\left(\dot{y}_G + \dot{h}\right)\cdot\left(x_G + x\right) - \left(\dot{x}_G + \dot{x}\right)\cdot\left(y_G + h\right)\right] \qquad [4]$$

Estendendo la [4] a tutti gli elementi costituenti il corpo, otteniamo l'espressione del momento della quantità di moto $\mathbf{L_z}$ rispetto all'asse **z** di traccia **O**

$$L_z = \sum dm\left[\left(\dot{y}_G + \dot{h}\right)\cdot\left(x_G + x\right) - \left(\dot{x}_G + \dot{x}\right)\cdot\left(y_G + h\right)\right] \quad [5]$$

Per la definizione di baricentro si ha:

$$\sum x dm = \sum h dm = 0$$

Tenuto presente che, indicata con $\dot{J}$ la velocità angolare del corpo, si ha:

$$\sum \dot{x} dm = \dot{J} \sum x dm = 0 \qquad\qquad \sum \dot{h} dm = \dot{J} \sum h dm = 0$$

L'espressione del momento della quantità di moto, indicata con **M** la massa totale del corpo, si semplifica ulteriormente:

$$L_z = M\left(x_G \dot{y}_G - y_G \dot{x}_G\right) + \sum\left(\dot{h}x - x\dot{h}\right)dm \qquad\qquad [6]$$

da cui, indicando con $\mathbf{I_G}$ il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse baricentrico e parallelo all'asse fisso **z** si ha[3]:

$$L_z = M\left(x_G \dot{y}_G - y_G \dot{x}_G\right) + I_G \dot{J} \qquad\qquad [7]$$

Per il teorema del momento della quantità di moto la derivata temporale di $\mathbf{L_z}$ deve essere pari al momento , rispetto all'asse **z**, di tutte le forze esterne:

$$\frac{d}{dt} L_z = M_z \qquad\qquad [8]$$

L'equazione [8] è particolarmente utile nello studio delle variazioni improvvise prodotte nel moto di un corpo rigido dall'azione di forze impulsive.

Negli esempi successivi, supporremo che il corpo abbia un piano di simmetria e che si muova soltanto in questo piano. Se un tale corpo riceve una percossa o un urto, pure nel piano del moto, vi si produrranno accelerazioni molto grandi, e *il moto successivo all'urto sarà differente da quello precedente, anche se non vi sono stati sensibili spostamenti.* Nel trattare tali problemi si usa trascurare del tutto le forze ordinarie. come il peso, rispetto alle forze molto intense che si sviluppano nell'urto; come pure si trascura lo spostamento del corpo durante l'urto.

In breve, conoscendo il moto di un corpo appena prima dell'urto, e la natura dell'urto, quale sarà il successivo moto del corpo ?

---

[1] ***x,y*** vengono dette coordinate *assolute* del punto A; **ξ,η** coordinate *relative*

[2] I momenti antiorari sono individuati dal segno positivo

[3] La [7] si ottiene facilmente dalla [6] ricordando le relazioni intercorrenti tra le coordinate cartesiane e polari.

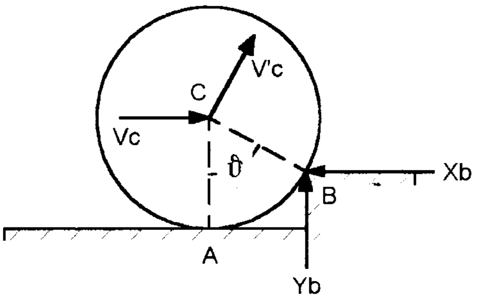
$$h = r \sin J \quad x = r\cos J \quad \dot{h} = \dot{J} r \cos J \quad \dot{x} = -\dot{J} r \sin J$$

da cui

$$\sum\left(-x\dot{h} + \dot{h}x\right) dm = \dot{J} \sum r^2 dm = I_G \dot{J}$$

Esempio n. 1

Consideriamo un cilindro omogeneo, di massa **M**, che rotola, con velocità costante, lungo un piano orizzontale e colpisce improvvisamente un ostacolo in **B**.
Appena prima dell'urto, il baricentro **C** ha velocità $\mathbf{v_c}$.
Si vuole determinare la nuova velocità $\mathbf{v'_c}$ del baricentro **C** appena dopo l'urto.



Appena prima dell'urto il punto **A** è il centro di istantanea rotazione; il cilindro, di raggio **r**, avrà perciò una velocità angolare pari a:

$$\dot{J} = \frac{v_C}{r}$$

Durante l'urto agiscono, nel punto **B**, delle forze impulsive $\mathbf{X_b}$ e $\mathbf{Y_b}$ di intensità tale da rendere trascurabile l'effetto del peso del cilindro.
Assunto **B** come polo dei momenti e, per quanto detto in precedenza, considerando solo l'azione di $\mathbf{X_b}$ e $\mathbf{Y_b}$, il momento delle forze è pari a zero: allora per la [8] il momento della quantità di moto del cilindro rispetto al punto **B** non varia. In particolare si può dire che il momento della quantità della quantità di moto un istante prima dell'urto deve essere pari al momento della quantità di moto un istante dopo l'urto.

Momento della quantità di moto
un istante prima dell'urto
(**A** centro di istantanea rotazione)

$$L_b = M\frac{r^2}{2}\left(\frac{v_c}{r}\right) + Mv_c r\cos J$$

Momento della quantità di moto
un istante dopo l'urto
(**B** centro di istantanea rotazione)

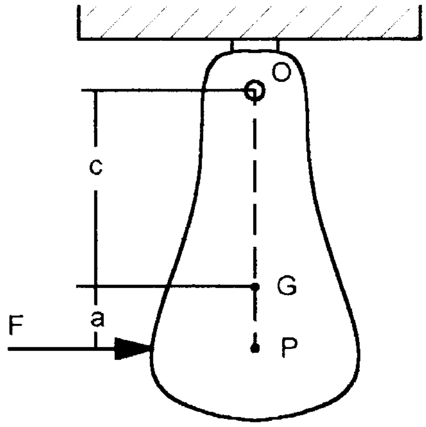
$$L'_b = M\frac{r^2}{2}\left(\frac{v'_c}{r}\right) + Mv'_c r$$

Uguagliando le due espressioni precedenti si ottiene il valore della velocità $\mathbf{v'_c}$ del baricentro appena dopo l'urto

$$v'_c = \frac{v_c}{3}\left(1 + 2\cos J\right)$$

Esempio n. 2

Un pendolo fisico sospeso in **O** e inizialmente in riposo è posto in rotazione da una percossa orizzontale **F**.
A quale distanza **a** sotto il baricentro si dovrà applicare la forza impulsiva **F** per evitare di creare reazioni in **O**?



Se la reazione in **O** è nulla, **F** è la sola forza da considerare durante l'urto[4] e il suo momento rispetto a **P** è nullo. Si deduce perciò che il momento della quantità di moto del corpo rispetto a **P** deve essere lo stesso prima e dopo l'urto. Poiché il corpo è inizialmente fermo (quantità di moto nulla), anche la quantità di moto appena dopo l'urto deve essere uguale a zero.
Ovvero, indicati rispettivamente la massa del pendolo e il suo raggio giratorio con **M** e **i** si ha:

$$L_p = Mi_c^2\dot{J} - M\dot{x}_c a = 0$$

Notando che **O** è il centro di istantanea rotazione si ha:

$$\dot{J} = \frac{\dot{x}}{c}$$

da cui:

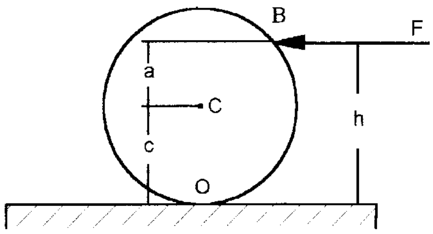
$$a = \frac{i_c^2}{c}$$

Quando il pendolo viene colpito nel punto **P**, nessuna forza viene trasmessa alla cerniera **O**. Il punto **P** viene talvolta denominato *centro di percussione del pendolo.*

[4] Si trascura, ovviamente, il contributo della forza peso

Esempio n. 3

A quale altezza **h** dovrebbe essere colpita una palla da bigliardo di raggio **c** da una forza orizzontale **F** per non avere slittamento nel punto di contatto **O** ?



Momento della quantità di moto rispetto a **B** *un istante prima dell'urto*

$$L_b = 0$$

Momento della quantità di moto rispetto a **B** *un istante dopo l'urto*

$$L_b' = I\dot{j} - Mv_c a$$

Uguagliando le due espressioni del momento della quantità di moto si ottiene:

$$I\dot{j} - Mv_c a = 0$$

Poiché **O** è il centro di istantanea rotazione si ha:

$$\dot{j} = \frac{v_c}{c}$$

Il momento di inerzia baricentrico di una sfera di massa **M** e raggio **c** vale:

$$I = M\frac{2}{5}c^2$$

Con semplici sostituzioni si ottiene:

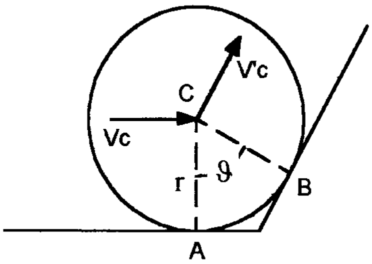
$$\frac{2}{5}Mc^2\frac{v_c}{c} - Mv_c a = 0$$

da cui

$$a = \frac{2}{5}c \qquad h = c + a = \frac{7}{5}c$$

Esempio n. 4

Un anello sottile omogeneo di massa **M** e raggio **r** rotola senza strisciare su di un piano orizzontale con velocità $\mathbf{v}_c$ e colpisce un piano inclinato come illustrato in figura. Con quale velocità $\mathbf{v'}_c$ l'anello comincerà a salire lungo il piano inclinato ?
(Si trascuri la tendenza a rimbalzare)



Momento della quantità di moto rispetto a **B** *un istante prima dell'impatto con il piano inclinato* (**A** centro di istantanea rotazione)

$$\dot{j} = \frac{v_c}{r}$$

$$L_b = Mv_c r\cos J + Mr^2\frac{v_c}{r}$$

Momento della quantità di moto rispetto a **B** *un istante dopo l'impatto con il piano inclinato* (**B** centro di istantanea rotazione)

$$\dot{j} = \frac{v_c'}{r}$$

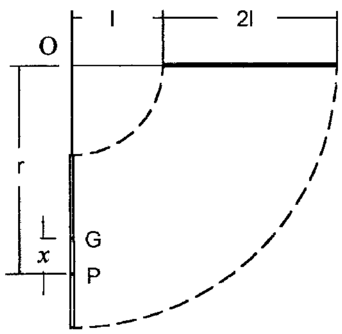
$$L_b' = Mv_c' r + Mr^2\frac{v_2'}{r}$$

Uguagliando le due espressioni del momento della quantità di moto si ricava la velocità incognita

$$v_c' = \frac{v_c}{2}\left(1 + \cos J\right)$$

Esempio n 5

Una sbarretta prismatica di lunghezza **l**, legata ad un cordino di lunghezza **l/2**, è sostenuta da un piano orizzontale liscio e ruota con velocità angolare costante **ω** intorno ad un asse verticale per **O**, come indicato dalle linee tratteggiate in figura. A quale distanza **r** da **O** si dovrà sistemare un piolo **P** nel piano in modo che, colpendolo, la sbarretta si fermi senza ruotare ?



Momento della quantità di moto rispetto a **P** *un istante prima dell'urto*

Momento di inerzia baricentrico della sbarretta **J**

Massa della sbarretta **m**

$$L = -J\cdot w + m\cdot w\cdot l\cdot x$$

$$L = -m\cdot\frac{l^2}{12}\cdot w + m\cdot w\cdot l\cdot x$$

Momento della quantità di moto rispetto a **P** *un istante dopo l'urto*

$$L' = 0$$

Poiché rispetto a **P** il momento delle forze è paria zero, si ha:

$$L = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{12} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{13}{12}\cdot l$$