

## Calcolo delle molle di compressione ad elica cilindrica con filo a sezione circolare

### Le barre di torsione a sezione circolare

Queste barre presentano una parte attiva elastica a sezione circolare piena e due teste, una delle quali si suppone fissa, mentre l'altra ruota di un determinato angolo  $\theta$  per effetto di un momento torcente  $M_t$  applicato alla stessa. Con riferimento alla condizione di carico illustrata in fig.1, la tensione massima di torsione  $J_1$  vale:

$$t_1 = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} \quad [1]$$

La tensione massima di taglio  $J_2$ , vale:

$$t_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \quad [2]$$

La freccia sotto carico  $f$ , indicato con  $G$  il modulo di elasticità tangenziale, si calcola con la seguente relazione<sup>1</sup>:

$$f = R \cdot q = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{F \cdot R^2 \cdot l}{G \cdot d^4} \quad [3]$$

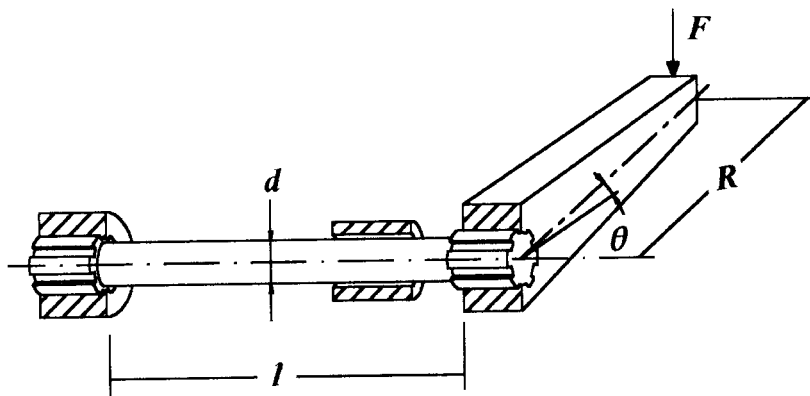


Fig. 1

<sup>1</sup> Indicato con  $J$  il momento quadratico di superficie rispetto all'asse polare della sezione e con  $z$  la sua distanza dall'incastro, ricordando che il momento torcente  $M_t$  è costante lungo tutto l'asse della barra si ha:

$$\frac{dq}{dz} = \frac{M_t}{G \cdot J} \quad dq = \frac{M_t}{G \cdot J} \cdot dz \quad \int_0^q dq = \frac{M_t}{G \cdot J} \int_0^l dz \quad q = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot J}$$

Posto

$$M_t = F \cdot R \quad J = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

si ricava la [3]

## Le molle di compressione ad elica cilindrica

### Determinazione delle tensioni

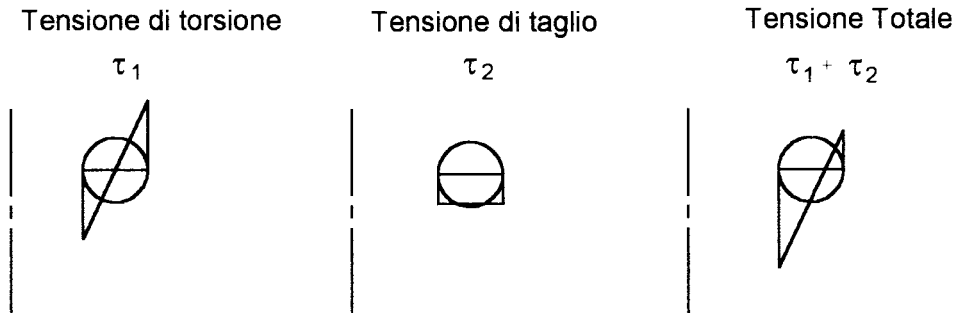


Fig. 2

Lo studio teorico delle tensioni agenti in un solido a sezione circolare costante, con asse disposto ad elica, presenta indubbiamente una certa complessità. In prima approssimazione tuttavia, una molla ad elica cilindrica, sottoposta ad un carico di compressione  $F$ , si comporta, sostanzialmente, come una barra di torsione. Indicati con  $d$  il diametro del filo e con  $D$  il diametro medio di avvolgimento, le tensioni massime di torsione e taglio,  $J_1$  e  $J_2$ , hanno le seguenti espressioni:

$$t_1 = \frac{8 \cdot F \cdot D}{p \cdot d^3} \quad t_2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{F}{p \cdot d^2} \quad [4]$$

La sollecitazione unitaria massima  $J$  si verifica nel punto più vicino all'asse della molla, laddove cioè le due tensioni  $J_1$  e  $J_2$  hanno segno concorde, e vale:

$$t = \frac{8 \cdot F \cdot D}{p \cdot d^3} \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{D} \right) \quad [5]$$

Si vede che il secondo termine tra parentesi, rappresentante l'effetto dello sforzo di taglio, aumenta con l'aumentare del rapporto  $d/D$  e diviene di una certa importanza nelle molle elicoidali pesanti ( $d$  elevato) nelle quali le esperienze eseguite mostrano effettivamente che le lesioni, di solito, iniziano dalla parte interna della spira.

La tensione calcolata con la [5] non tiene ancora conto, tuttavia, dell'effetto della curvatura della molla che, determinando un aumento dello scorrimento unitario sulle fibre interne<sup>2</sup>, induce un ulteriore aumento della tensione tangenziale  $J$ .

Il Whal<sup>3</sup> ha compendiato brillantemente tutte queste considerazioni proponendo un semplice coefficiente  $k$  che, tenendo conto del rapporto di avvolgimento<sup>4</sup>  $D/d$ , permette di determinare la tensione massima  $J_k$  in funzione della

<sup>2</sup> Il momento torcente, costante lungo l'asse dell'elica di avvolgimento, produce una rotazione relativa, tra due sezioni radiali successive, che determina uno scorrimento unitario maggiore sulle fibre interne (più corte) rispetto a quelle esterne (più lunghe).

<sup>3</sup> A.M. Whal, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 1928

<sup>4</sup> Il rapporto di avvolgimento  $c$  deve essere compreso tra 3 e 20

sola tensione di torsione  $J_1$  calcolata prescindendo dalla curvatura.

$$t_k = \frac{8}{p} \cdot k \cdot \frac{D}{d^3} \cdot F \quad k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} \quad c = \frac{D}{d} \quad [6]$$

### Tensioni massime di esercizio

La tipologia del regime tensionale (*statico* o *dinamico*)<sup>5</sup> permette di definire le tensioni massime di esercizio ammesse.

#### < Regime statico di tensione

Per molle avvolte a freddo, senza successivo trattamento di bonifica<sup>6</sup>, il rapporto tra la massima tensione corretta  $J_{kn}$  realizzabile in esercizio e il carico unitario di rottura a trazione  $R$  del materiale non deve superare le seguenti percentuali:

- 55% per fili di acciaio non legato o legato, pretemprati;
- 50% per fili di acciaio non legato o legato, patentati<sup>7</sup>;
- 50% per fili di acciaio inox o fortemente legati;
- 40% per i fili di bronzo fosforoso o al silicio, trafilati;
- 40% per i fili di ottone duro, trafilati.

Per molle avvolte a caldo o avvolte a freddo e successivamente bonificate il rapporto  $J_{kn}/R$  definito al punto precedente deve essere contenuto entro il 55%.

#### < Regime dinamico di tensione

I valori ammissibili in esercizio delle tensioni corrette di torsione delle molle a elica cilindrica di compressione, si deducono dai diagrammi di *Smith & Goodman* relativi al materiale in uso.

E' essenziale, per la capacità di resistenza a fatica di una molla, che la superficie, specie in corrispondenza del mantello cilindrico interno, sia perfettamente liscia, senza segni o incisioni e priva, per quanto possibile, di zone decarburate<sup>8</sup>.

**N.B.:** *le tensioni ammissibili, sia statiche che dinamiche, dipendono fortemente dal diametro del filo. A parità di ogni altra condizione, i fili di minore diametro hanno tensioni ammissibili più elevate di quelle adottabili per i fili di maggiore diametro. (vedi tabelle allegate)*

---

<sup>5</sup> Sono considerate soggette a regime statico di tensione le molle operanti sotto carico costante, o sottoposte a variazioni occasionali di carico, così diluite nel tempo da totalizzare meno di 10000 alternanze di carico nel corso dell'intera vita della molla. Le molle non caricate con regime statico di tensione si ritengono soggette a regime dinamico di tensione.

<sup>6</sup> Con il termine bonifica si designa l'insieme delle due operazioni di tempra e rinvenimento.

<sup>7</sup> Il patentamento consiste in un'austenizzazione seguita da un raffreddamento sufficientemente energico, ma al di sopra di  $M_s$ , tale da conferire al materiale una struttura favorevole al successivo lavoro di deformazione a freddo.

<sup>8</sup> La decarburazione consiste in una diminuzione del contenuto di carbonio sotto l'azione, a temperatura sufficientemente elevata, del mezzo esterno.

*Calcolo delle deformazioni*

L'influenza della curvatura sulla determinazione delle deformazioni, diversamente da quanto visto a proposito delle tensioni, è del tutto trascurabile. La freccia  $f$  indotta dal carico assiale  $F$  può essere direttamente calcolata con la [3] una volta che la lunghezza  $l$  della barra di torsione equivalente sia sostituita con la lunghezza rettificata della molla  $l_R$ .

Indicato con  $i$  il numero di spire attive si ha:

$$f = q \cdot \frac{D}{2} = \frac{8}{p \cdot G} \cdot \frac{D^2}{d^4} \cdot l_R \cdot F = \frac{8}{p \cdot G} \cdot \frac{D^2}{d^4} \cdot p \cdot D \cdot i \cdot F = \frac{8}{G} \cdot \frac{D^3}{d^4} \cdot i \cdot F \quad [7]$$

I valori che si consigliano di assegnare al modulo di elasticità tangenziale  $G^9$  dei materiali più impiegati nella costruzione delle molle a elica cilindrica, espressi in N/mm<sup>2</sup>, sono i seguenti:

78500-81500	acciaio legato o non legato, per molle avvolte a freddo senza successivo trattamento di bonifica;
75500-78500	acciaio da bonifica, per molle avvolte a caldo o avvolte a freddo e successivamente bonificate;
71500-75500	acciaio inox per molle;
72000-77000	Inconel, Duranickel;
62000-67000	Monel K;
41000-43000	bronzo al silicio o bronzo fosforoso per molle;
34000-36000	ottone trafilato duro per molle.

---

<sup>9</sup> I valori di  $G$  tabulati si riferiscono alla temperatura di esercizio di  $20^\circ$ . Per temperature superiori il modulo di elasticità tangenziale deve essere modificato secondo la seguente relazione:

$$G_T = G \cdot [1 - r \cdot (T - 20)]$$

dove  $T$  è la temperatura di esercizio espressa in gradi centigradi e  $r$  è un coefficiente il cui valore è:

$0.25 \cdot 10^{-3}$	acciai non legati o legati;
$0.40 \cdot 10^{-3}$	acciai inox, bronzo fosforoso e ottone duro.

*Definizione delle spire*

Spire compressive  $i_t$

E' conveniente, per ottenere una corretta spinta assiale, che il numero totale di spire  $i_t$  risulti un multiplo dispari di mezza spira. o almeno, nel caso in cui  $i_t$  sia minore di **8**, un multiplo intero dispari di un quarto di spira.

L'impiego di un numero intero di spire totali è sconsigliabile soprattutto nel caso di molle soggette a regime dinamico di tensione.

Spire inattive  $i_m$

Il numero di spire inattive  $i_m$  dipende dalla configurazione dei terminali della molla.

molle con due terminali aperti  $i_m = 0$

nelle molle con due terminali aperti molati, ovvero ravvicinati molati, ovvero ravvicinati  $i_m$  può variare da da 1.25 a 1.75, secondo lo sviluppo angolare effettivo dell'appoggio delle estremità. Ad uno sviluppo angolare di 270° (caso più frequente)  $i_m$  assume il valore di **1.50**.

nelle molle con due terminali chiusi molati, ovvero chiusi, ovvero rastremati chiusi e molati  $i_m$  va posto pari a **2**.

Spire attive  $i$

Il numero di spire attive o utili, da inserire nella [7], è pari alla differenza tra il numero di spire totali  $i_t$  e il numero di spire inattive  $i_m$

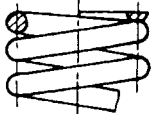
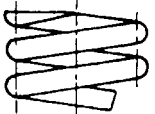
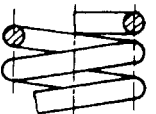
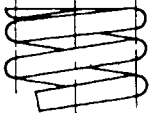




Prospetto delle configurazioni dei terminali di una molla cilindrica					
Terminale molato		Estremità del filo spianata con molatura dopo avvolgimento.		Terminale non molato	
				Estremità del filo troncata e non molata.	
Terminale chiuso		Terminale aperto		Terminale chiuso	
					
Spira estrema con variazione di passo; estremità del filo chiusa a contatto per una frazione di spira o anche per una o più spire.		Spira estrema senza variazione di passo.		Spira estrema con variazione di passo e chiusa a contatto	
Terminale ravvicinato		Terminale rastremato		Terminale conico	
					
Spira estrema con variazione di passo; estremità del filo ravvicinata per una frazione di spira.		Spira estrema con variazione di passo; estremità del filo ravvicinata e rastremata.		Spira estrema con diametro minore di quello delle spire del corpo molla, con variazione di passo.	
Terminale ravvicinato		Terminale sporgente			
					
Spira estrema con variazione di passo, estremità del filo ravvicinata per una frazione di spira.		Spira estrema con diametro maggiore di quello delle spire del corpo molla, con variazione di passo.			

Fig. 3

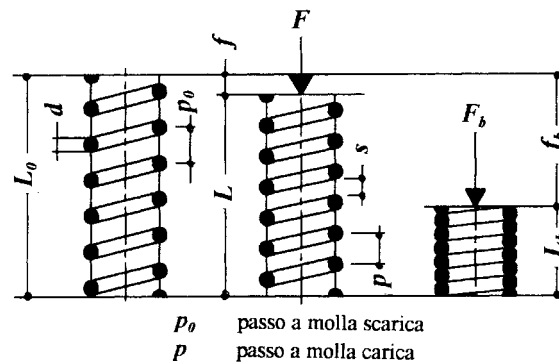
*Definizione delle lunghezze e delle frecce e vuoti interspira*

Fig. 4

Lunghezza a molla scarica	$L_0$	lunghezza libera
Lunghezza a molla carica	$L$	lunghezza di lavoro
Lunghezza a blocco	$L_b$	è la lunghezza della molla completamente compressa, ovvero nella condizione in cui i vuoti interspira $s$ sono nulli.

La lunghezza a blocco  $L_b$  dipende oltre che dal numero di spire  $i$ , e dal diametro del filo  $d$ , anche dalla configurazione dei terminali e dall'eventuale spessore del rivestimento protettivo.

Nel caso di molle con terminali non molati, né rastremati, siano essi aperti o chiusi, la lunghezza a blocco vale:

$$L_b = (i_t + 1) \cdot d$$

Nel caso di molle con terminali molati la lunghezza a blocco, vale:

$$L_b = (i_t - 0.5) \cdot d$$

**Luce minima di esercizio  $S$** 

La luce minima di esercizio  $S$ , cioè la somma dei vuoti interspira, che è consigliabile resti ancora disponibile in corrispondenza del carico massimo di esercizio della molla, si calcola con la formula:

$$S = s \cdot i \cdot (0.5 + d)$$

dove  $s$  è un coefficiente adimensionato esprimibile in funzione del rapporto di avvolgimento  $c$  (compreso tra 3 e 15) dalla seguente relazione:

$$s = 0.1 - 0.0075 \cdot c + 0.0015 \cdot c^2$$

Nota la luce minima di esercizio  $S$ , la freccia sotto carico  $f$  e la lunghezza di blocco  $L_b$ , si possono determinare la lunghezza a molla scarica  $L_0$  e la lunghezza a molla carica  $L$

$$L_0 = L_b + S + f \qquad L = L_b + S \qquad [8]$$

Freccia sotto carico  $f$

$$f = L_0 - L$$

Freccia a blocco  $f_b$

$$f_b = L_0 - L_b$$

### Diametro di avvolgimento

Nel caso di molle con ambedue le estremità poste nell'impossibilità di svolgersi, l'applicazione del carico provoca un aumento dei diametri di avvolgimento medio, esterno e interno.

L'aumento  $\Delta D$ , del diametro medio di avvolgimento, quando la molla passa dall'assetto privo di carico all'assetto di blocco, è espresso dalla formula:

$$\Delta D = \frac{\left( \frac{L_0 - L_b}{i} + d \right)^2 - d^2}{20 \cdot D} \quad [9]$$

### Stabilità laterale

Le molle ad elica cilindrica, sottoposte a carico assiale di compressione, tendono ad inflettersi lateralmente, comportandosi come un'asta caricata di punta. La stabilità laterale è collegata strettamente, oltre alle condizioni di fissaggio delle estremità, anche ai valori assunti dal grado di snellezza  $\mathbf{g}$  e dal rapporto di inflessione  $\mathbf{n}$  definiti come segue:

$$\mathbf{l} = \frac{L_0}{D} \quad \mathbf{j} = \frac{f}{L_0}$$

Per ogni molla si calcola in pratica un valore critico del rapporto di inflessione  $\mathbf{n}_{cr}$  al di sopra del quale la molla risulta priva di stabilità laterale. Il valore di  $\mathbf{n}_{cr}$  si calcola mediante la formula<sup>10</sup>:

$$\mathbf{j}_{cr} = X \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - Y \cdot \left( \frac{Z}{\mathbf{l}} \right)^2} \right] \quad [10]$$

dove  $X$  e  $Y$  sono due coefficienti legati alle caratteristiche della molla, al tipo di materiale impiegato e sono esprimibili, indicando con  $E$  il modulo di elasticità normale, secondo le seguenti relazioni:

$$X = \frac{0.5}{1 - \frac{G}{E}} \quad Y = 19.74 \cdot \frac{1 - \frac{G}{E}}{1 + 2 \cdot \frac{G}{E}} \quad [11]$$

Il rapporto  $G/E$  può porsi, nella [11], pari a:

0.385 per l'acciaio

0.420 per il bronzo

0.360 per l'ottone

---

<sup>10</sup> Il valore di  $\mathbf{n}_{cr}$  definito dalla [10] non può mai essere, ovviamente, superiore all'unità. Inoltre, affinché la [10] sia applicabile il valore di  $Z/\mathbf{g}$  deve essere tale rendere positivo il termine sotto radice. In pratica, considerando molle realizzate con filo in acciaio il valore di  $Z/\mathbf{g}$  necessita di una valutazione solo quando sia inferiore a **0.372**

Il coefficiente  $Z$  che compare nella [10] dipende invece esclusivamente dalle condizioni di vincolo delle estremità della molla.

Ad esso si possono assegnare i seguenti valori:

- 2.0 se entrambi i piattelli di estremità sono incastrati e guidati lateralmente;
- 1.5 se uno dei due piattelli di estremità è incastrato e l'altro è incernierato e il loro moto relativo è guidato lateralmente;
- 1.0 se entrambi i piattelli di estremità sono incernierati e guidati lateralmente;
- 1.0 se entrambi i piattelli di estremità sono incastrati, ma non sono guidati lateralmente;
- 0.5 se uno dei due piattelli di estremità è incastrato e l'altro libero.

### *Frequenza naturale di risonanza*

Una molla a elica cilindrica, avente due estremità appoggiate a due piattelli rigidi, ha una frequenza naturale di risonanza  $N$ , che è valutabile, indicato con  $D$  la massa volumica, con la seguente formula:

$$N = 3650 \cdot \sqrt{\frac{G}{r}} \cdot \frac{d}{i \cdot D^2} \quad [12]$$

Nel caso particolare di molle avvolte a freddo e realizzate con filo di acciaio pretemprato, si può porre:

$$G = 81500 \text{ N/mm}^2 \quad r = 7.85 \cdot 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$$

per cui la [12] diviene:

$$N = 3.63 \cdot 10^5 \cdot \frac{d}{i \cdot D^2} \quad [12b]$$

In sede di progetto è necessario verificare che la frequenza naturale di risonanza, calcolata con le [12], risulti più elevata della più alta armonica della frequenza di esercizio ancora suscettibile, per la sua intensità, di innescare il fenomeno della risonanza.



*Schema del procedimento di calcolo*

## Molla operante in regime statico di tensione

Dati: carico  $F$ , freccia  $f$  e diametro medio di avvolgimento  $D$

- < si determina, con procedimento iterativo, il diametro minimo  $d$  che, sostituito  $J_k$  con  $J_{kn}$ , verifica la [6];
- < si ricava, dalla [7], il numero di spire attive e si determinano frecce e lunghezze;  
( $L$  e  $L_0$  si calcolano con la [8] previa determinazione di  $S$ )
- < si calcola il carico teorico  $F_b$  sopportato dalla molla in posizione di blocco;  
$$F_b : F = f_b : f$$
- < si valuta la tensione corretta in posizione di blocco  $J_{kb}$  ;  
$$F_b : F = t_{kb} : t_k$$
- < si determina la tensione di collaudo  $J_{kc}$  ;  
La tensione di collaudo  $J_{kc}$  deve essere posta pari almeno a **1.1** volte la tensione massima di esercizio  $J_k$ , ma in ogni caso minore del limite elastico a torsione del materiale impiegato.
- < si determina il carico di collaudo  $F_c$  ;  
$$F_c : F = t_{kc} : t_k$$
  
Qualora il carico di collaudo  $F_c$  risulti maggiore del carico di blocco  $F_b$  è quest'ultimo che deve essere adottato come carico di collaudo
- < si calcola la dilatazione del diametro di avvolgimento con la [9] ;
- < si valuta, infine, la stabilità laterale.

## Molla operante in regime dinamico di tensione

Dati: il carico massimo  $F_n$ , il carico minimo  $F_1$ , il diametro medio di avvolgimento  $D$ , la corsa della molla  $\Delta L$  tra i due carichi estremi.

- < si determina, con procedimento iterativo, il diametro minimo  $d$  che, sostituito  $J_k$  con  $0.7 J_{kn}$ , verifica la [6];
- < si conduce la verifica a fatica;
- < si determina il numero di spire attive  $i$  con la seguente relazione.  
$$i = \frac{G}{8} \cdot \frac{d^4}{D^3} \cdot \frac{\Delta L}{F_n - F_1}$$
- < si determinano frecce e lunghezze;  
( $L$  e  $L_0$  si calcolano con la [8] previa determinazione di  $S$ )
- < si calcola il carico teorico  $F_b$  sopportato dalla molla in posizione di blocco;  
$$F_b : F_1 = f_b : f_1$$

- < si valuta la tensione corretta in posizione di blocco  $\mathbf{J}_{kb}$  ;

$$F_b : F_1 = t_{kb} : t_k$$

- < si determina la tensione di collaudo  $\mathbf{J}_{kc}$  ;

La tensione di collaudo  $\mathbf{J}_{kc}$  deve essere posta pari almeno a **1.1** volte la tensione massima di esercizio  $\mathbf{J}_k$ , ma in ogni caso minore del limite elastico a torsione del materiale impiegato.

- < si determina il carico di collaudo  $F_c$  ;

$$F_c : F_1 = t_{kc} : t_k$$

Qualora il carico di collaudo  $F_c$  risulti maggiore del carico di blocco  $F_b$  è quest'ultimo che deve essere adottato come carico di collaudo

- < si calcola la dilatazione del diametro di avvolgimento con la [9] ;

- < si valuta la stabilità laterale;

- < si determina la frequenza naturale di risonanza verificando che risulti più elevata della più alta armonica della frequenza di esercizio ancora suscettibile, per la sua intensità, di innescare il fenomeno della risonanza.

## **BIBLIOGRAFIA**

### **Norma UNI 7900 parte 2<sup>a</sup>**

Giovanazzi R.	<i>Costruzione di Macchine</i>	vol.1	Patron
Massa E.	<i>Costruzione di Macchine</i>	vol.2	Masson
Pierotti P.	<i>Meccanica, Macchine e progettazione</i>	vol.3	Calderini
Straneo / Consorti	<i>Disegno, progettazione e organizzazione industriale</i>	vol.2	Principato
Timoshenko S.	<i>Scienza delle costruzioni</i>	vol.1	Viglongo