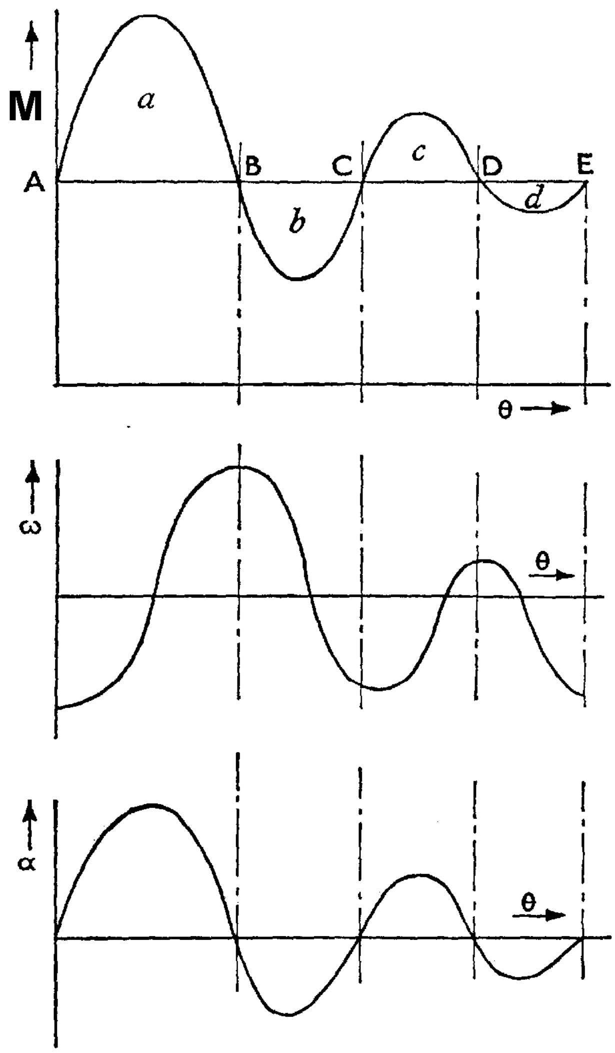
IL VOLANO

Il momento torcente disponibile all'albero di un motore non è costante ma varia, lungo il ciclo, in conseguenza della variazione di pressione all'interno del cilindro, dell'angolo di manovella e delle forze di inerzia associate agli organi in movimento.

La prima delle figure sotto rappresentate mostra l'andamento del momento torcente **M** in funzione dell'angolo di manovella θ. L'area sottesa dalla curva rappresenta il lavoro motore sviluppato in un ciclo. Se il momento resistente è costante (ipotesi semplificativa, ma realistica) questo è rappresentato dal segmento **AE** che definisce pure il valore del ***Momento Motore Medio.***



Tra i punti **A** e **B** la coppia motrice è eccedente rispetto a quella resistente e il sistema accelera. Tra i punti **B** e **C** il momento motore è inferiore a quello resistente, perciò tutto il sistema è assoggettato ad una decelerazione. Estendendo queste considerazioni a tutto il ciclo si conclude che:

- nei tratti **AB** e **CD** il *sistema accelera*
- nei tratti **BC** e **DE** il *sistema decelera*

Nei punti **A**, **B**, **C**, **D**, **E** luogo di intersezione delle due curve del momento motore e del momento resistente, la coppia motrice uguaglia il momento resistente e il sistema è soggetto ad una accelerazione nulla. Si può perciò affermare che nei punti sopra considerati la velocità del sistema raggiunge dei massimi o dei minimi relativi[1].

---

[1] Sia f(x) una funzione continua e derivabile in un intorno H del punto x_0. Indicata con f'(x) la derivata prima della funzione, se nell'intorno di H risulta:

$$f'(x)\begin{cases} <0 & per\ x<x_0 \\ =0 & per\ x=x_0 \\ >0 & per\ x>x_0 \end{cases}$$

allora x_0 è un punto di minimo relativo per la funzione

$$f'(x)\begin{cases} >0 & per\ x<x_0 \\ =0 & per\ x=x_0 \\ <0 & per\ x>x_0 \end{cases}$$

allora x_0 è un punto di massimo relativo per la funzione

Tenuto presente che l'accelerazione angolare α rappresenta la derivata prima della velocità angolare ω, è facile vedere che i punti **B** e **D** sono punti di massimo relativo per l'espressione della velocità angolare, mentre i punti **A**, **C**, **E** rappresentano dei minimi relativi

Il lavoro di fluttuazione

Da **A** a **B**, come già detto, il sistema accelera, ovvero indicata con $\boldsymbol{\omega_A}$ la velocità nel punto **A**, in **B** si raggiungerà una velocità $\boldsymbol{\omega_B}$ maggiore. Il lavoro motore eccedente lungo il tratto **AB** ($\boldsymbol{L_a}$) è stato speso per accelerare il sistema, e incrementarne, di conseguenza, l'energia cinetica. Applicando infatti la legge della conservazione dell'energia, indicato con **J** il momento di inerzia delle masse rotanti ridotte al medesimo asse, si ha:

$$L_a = \frac{1}{2} J \cdot \left(w_B^2 - w_A^2\right) \qquad [1]$$

Estendendo le stesse considerazione ai tratti **BC**, **CD**, e **DE** del ciclo si ha:

$$L_b = \frac{1}{2} J \cdot \left(w_B^2 - w_C^2\right)$$

$$L_c = \frac{1}{2} J \cdot \left(w_D^2 - w_C^2\right)$$

$$L_d = \frac{1}{2} J \cdot \left(w_D^2 - w_E^2\right)$$

Poiché l'area corrispondente a $\boldsymbol{L_a}$ è sicuramente maggiore delle rimanenti, anche l'incremento di velocità che si ha nel tratto AB è certamente superiore a quello registrato nei restanti. Il problema è ora quello di valutare se tale incremento di velocità può essere giudicato accettabile.
Compito del progettista è appunto quello di aumentare, quando necessario, il momento di inerzia della trasmissione, aggiungendo eventualmente una massa volanica, in modo da mantenere l'incremento di velocità entro limiti tollerabili

$$J = \frac{2 \cdot L_a}{\left(w_A^2 - w_B^2\right)} \qquad [2]$$

$\boldsymbol{L_a}$ è, come già detto, la più grande, in valore assoluto, fra le fluttuazioni presenti nel ciclo e viene semplicemente denominata ***lavoro di fluttuazione***. In seguito pertanto, quando si parlerà di lavoro di fluttuazione si intenderà sempre la più grande, in valore assoluto, fra le fluttuazioni presenti nel ciclo.

Determinazione del momento di inerzia del volano

La relazione [2] sarebbe già di per sé risolutiva, senonché il lavoro di fluttuazione ***L*** e la differenza dei quadrati delle velocità sono due grandezze non facilmente determinabili in fase di progetto.
Giova allora introdurre due parametri adimensionali: *il grado di irregolarità* e *il coefficiente di fluttuazione*.

Grado di irregolarità δ

$$d = \frac{\Delta w}{w_m} = \frac{w_B - w_A}{w_m} \qquad [3]$$

dove **Δω** è la variazione di velocità corrispondente al lavoro di fluttuazione ***L*** e $\boldsymbol{\omega_m}$ è la velocità media di regime

Coefficiente di fluttuazione β

Il coefficiente di fluttuazione è definito come il rapporto tra il lavoro di fluttuazione ***L*** e il lavoro intero del ciclo **E**

$$b = \frac{L}{E} \qquad [4]$$

Confrontando la [4] con la [2] si ricava:

$$b = \frac{J \cdot \left(w_B^2 - w_A^2\right)}{2E} = \frac{J \cdot \left(w_B + w_A\right) \cdot \left(w_B - w_A\right)}{2E}$$

Dividendo e moltiplicando per **ω$_{\mathbf{m}}$** , tenuto presente che, per un limitato valore dello scarto di velocità, si può ritenere $w_m = \dfrac{w_B + w_A}{2}$ si ottiene:

$$b = J \cdot \frac{w_B + w_A}{2} \cdot \frac{w_m}{E} \cdot \frac{\left(w_B - w_A\right)}{w_m} = \frac{J \cdot w_m^2 \cdot d}{E}$$

da cui:

$$J = \frac{L}{w_m^2 \cdot d} = \frac{b \cdot E}{w_m^2 \cdot d} \qquad [5]$$

La [5] permette di determinare il momento di inerzia complessivo della trasmissione atto a realizzare, in corrispondenza di un coefficiente di fluttuazione **β**, il prestabilito grado di irregolarità **δ** alla velocità di regime **ω$_{\mathbf{m}}$**

Si possono presentare due casi:

a) il valore di **J** ricavato dalla [5] è ***minore*** del momento di inerzia complessivo attuale della trasmissione **J$_{\mathbf{0}}$**. In questo caso non occorre aggiungere masse supplementari, dato che gli stessi organi della macchina sono in grado di rendere la trasmissione uniforme entro i limiti stabiliti dal valore di **δ**
b) il valore di **J** ricavato dalla [5] è ***superiore*** al momento di inerzia complessivo attuale della trasmissione **J$_{\mathbf{0}}$**. In questo caso occorre invece aggiungere una massa volanica supplementare che con il suo momento di inerzia aggiuntivo sia in grado di ridurre la variazione di velocità entro i limiti definiti dal valore di **δ**

Indicato con **J** il momento di inerzia calcolato con la [5] e con **J$_{\mathbf{0}}$** il momento di inerzia della trasmissione, il momento di inerzia del volano **J$_{\mathbf{V}}$** vale[1]:

$$J_V = J - J_0 \qquad [6]$$

La [5] si trova spesso espressa in forma diversa, dato che sovente non viene assegnata l'energia del ciclo, bensì la potenza del motore.

$$J = \frac{j \cdot N}{d \cdot n^3} \qquad [5b]$$

dove
N potenza espressa in kW
n velocità di rotazione in giri/min

[1] In pratica, il momento di inerzia della trasmissione viene trascurato, cosicché il momento di inerzia del volano risulta definito direttamente dalla [5] ponendo $J_V = J$

Si riportano di seguito i valori dei coefficienti **φ** e **δ** tabellati rispettivamente in funzione del tipo di motore e della sua utilizzazione

Coefficiente di fluttuazione φ

Tipo di motore	$\varphi\ 10^6$
Motori a vapore monocilindrici	0.88
Motori a vapore a 2 cilindri con manovella a 120°	0.165
Motori a vapore a 2 cilindri con manovella a 180°	0.385
Motori a scoppio 4 tempi 1 cilindro	11
Motori a scoppio 4 tempi 4 cilindri	1.155
Motori a scoppio 2 tempi 1 cilindro	4.455
Motori a scoppio 2 tempi 2 cilindri	1.1
Motori Diesel 4 tempi 1 cilindro	19.8
Motori Diesel 4 tempi 2 cilindri	8.8
Motori Diesel 4 tempi 3 cilindri	4.84
Motori Diesel 4 tempi 4 cilindri	1.155

Grado di irregolarità δ

Tipo di utilizzatore	δ
Pompe e punzonatrici	1:30
Trasmissione d’officina	1:40
Macchine per la carta	1:40
Molini	1:50
Filatoi per titoli bassi	1:60
Filatoi per titoli alti	1:100
Dinamo per illuminazione	1:150
Alternatori trifase	1:300

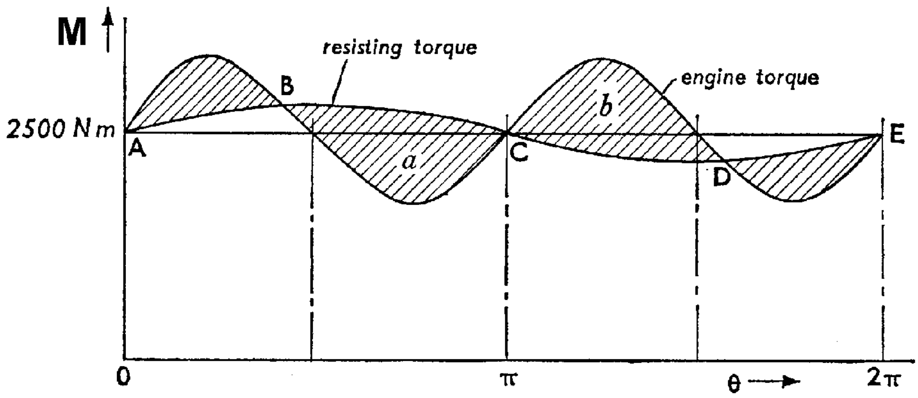
Problema 1

A machine running at an average speed of 300 rev/min is driven through a single reduction gear from an engine running at an average speed of 600 rev/min. The moment of inertia of the rotating parts on the machine shaft is equivalent to 110 kg at a radius of 0.3 m and that of rotating parts on the engine shaft 18 kg at a radius of 0.3 m.

The torque transmitted to the machine from the engine is 2500+675 sin2θ Nm, where θ is the angle of rotation of the machine from some datum.
The torque required to drive the machine is 2500+270 sinθ Nm.

Find the coefficient of fluctuation of speed.

The torque/crank angle curves for the engine and machine are shown below.



La coppia motrice e la coppia resistente sono uguali quando è verificata la seguente relazione:

$$2500 + 675\sin 2J = 2500 + 270\sin J$$

Ovvero quando $5\sin J\ \cos J = \sin J$ [P1]

La [P1] è verificata quando $\sin J = 0 \quad \cos J = 0.2$

Cioè in corrispondenza dei seguenti valori di

$J = 0,\ p,\ 2p$, etc e $J = 78°28',\ 281°32'$

La più grande fluttuazione di energia si ha tra i punti **B** e **C**, oppure tra **C** e **D**, ed è rappresentata dalle aree **a** o **b**

$$L_{BC} = \int_{78°21'}^{180°} (675\sin 2J - 270\sin J)\cdot dJ = -972\ Nm$$

$$L_{CD} = \int_{180°}^{281°32'} (675\sin 2J - 270\sin J)\cdot dJ = 972\ Nm$$

$\mathbf{L_{BC}}$ ha valore negativo perché lungo **BC** il lavoro resistente supera il lavoro motore.

Determiniamo il valore del momento di inerzia totale **J** all'albero

$$J = 110\cdot 0.3^2 + 18\cdot 0.3^2\cdot\left(\frac{600}{300}\right)^2 = 16.38\ Nm^2$$

Dalla [5] si ha:

$$J = \frac{L}{w_m^2\cdot d}$$

Con i dati del problema si ha:

$$J = 16.38\ kgm^2 \qquad w_m = \frac{300\cdot 2p}{60}\ \ rad/s$$

$$L = 972\ Nm$$

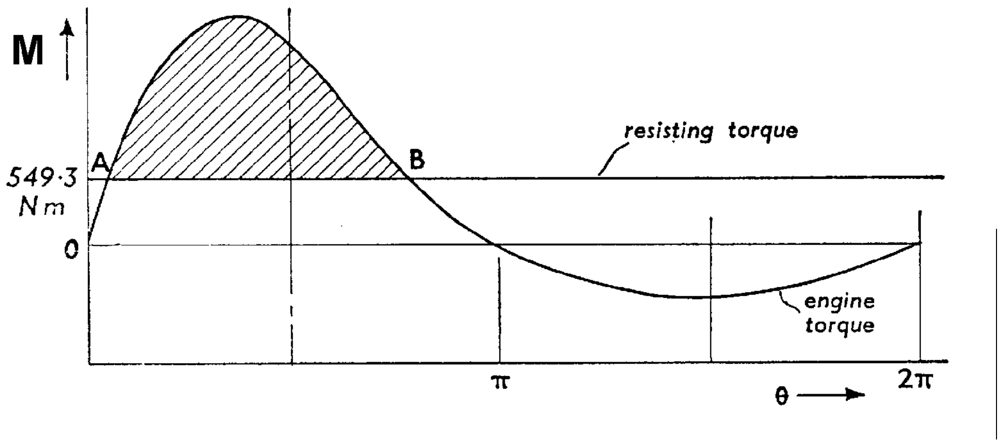
da cui:

$$d = \frac{972\cdot 60^2}{16.38\cdot(300\cdot 2p)^2} = 0.06$$

Problema 2

The turning moment diagram for an engine is given by : Torque (Nm)=2100sinθ+900sin2θ for values of θ, the crank angles, between 0 and , and by : Torque (Nm)=375sinθ for values of θ between and 2 . This is repeated for every revolution of the engine

The resisting torque is constant and the speed is 850 rev/min. The total moment of inertia of rotating parts of the engine and the driven member is 270 kgm^2. Determine: (i) the power; (ii) the fluctuation in speed; (iii) the maximum instantaneous angular acceleration of the engine, and the value of θ at which it occurs.



Il lavoro compiuto in un ciclo vale $\mathbf{L_C}$

$$L_C = \int_0^{2p} \left(2100\sin J + 900\sin 2J\right)\cdot dJ$$

$$+\int_p^{2p} 375\sin J \cdot dJ = 3450 \quad Nm$$

La potenza **P** si determina dividendo $\mathbf{L_C}$ per il tempo impiegato a completare un ciclo. Indicata con **n** la velocità di rotazione in giri/min si ha:

$$P = \frac{L_C}{t} = \frac{L_C \cdot 60}{(2p \cdot n)} = 307 \quad kW$$

La coppia resistente (costante) vale $\mathbf{M_R}$

$$M_R = \frac{L_C}{2p} = \frac{3450}{2p} = 549.3 \quad Nm$$

Determiniamo ora gli angoli di manovella **θ** in corrispondenza dei quali il momento motore $\mathbf{M_M}$ uguaglia il momento resistente $\mathbf{M_R}$. Gli angoli di manovella devono rispettare la seguente equazione:

$$M = M_R$$

$$2100\cdot\sin J + 900\cdot\sin 2J = 549.3$$

La risoluzione della equazione trigonometrica può facilmente ottenersi con un software matematico elementare (Derive)

$$J_1 = 8°8' \qquad J_2 = 136°24'$$

Il lavoro di fluttuazione ***L*** vale perciò:

$$L = \int_{8°8'}^{136°24'} \left(2100\sin J + 900\sin 2J\right)\cdot dJ$$

$$-549.3\cdot\left(136°24' - 8°8'\right)\cdot\frac{2p}{360} = 2778 \quad Nm$$

La massima accelerazione angolare si ha all'angolo di manovella in corrispondenza del quale la differenza tra il momento motore e quello resistente raggiunge il massimo, e poiché il momento resistente è costante, tale massimo si trova semplicemente ponendo a zero la derivata prima dell'espressione del momento motore:

$$\frac{dM_M}{dJ} = 0$$

$$2100\cos J + 1800\cos 2J = 0$$

ovvero

$$12\cos^2 J + 7\cos J - 6 = 0$$

da cui

$$J = 61°45'$$

Il momento motore massimo $\mathbf{M_{Max}}$ vale:

$$M_{M\,\max} = 2100\sin(61°45') + 900\sin(123°30')$$
$$= 2600 \; Nm$$

e l'accelerazione angolare **α** massima vale infine:

$$a = \frac{M_{M\,\max} - M_R}{J} = \frac{2600 - 549.3}{270} = 7.6 \quad rad / s$$

Problema 3

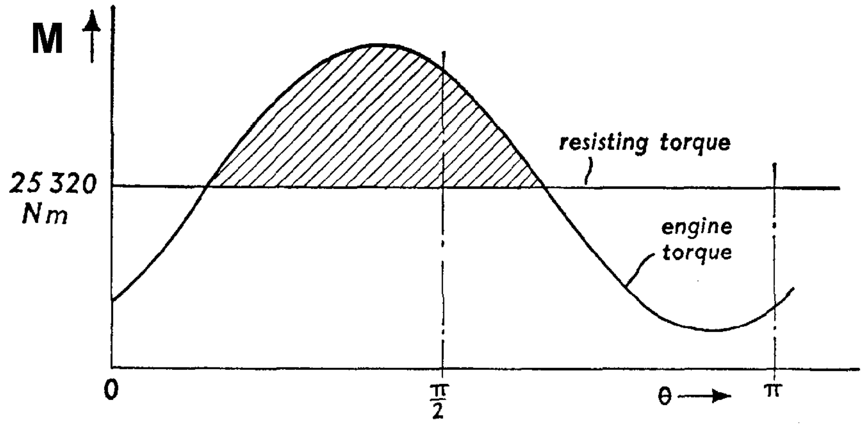
The torque on the crankshaft of an engine is given by the equation:

$$T(Nm) = 25320 + 12600 \sin 2J - 15650 \cos 2J$$

where θ is the crank angle. The resisting torque is uniform. The moment of inertia of the flywheel is 16000 kgm^2 and the mean speed of the engine is 150 rev/min.

Calculate: a) the total of energy stored by the flywheel,

b) the variation of angular velocity of the flywheel,



Il momento resistente $\mathbf{M_R}$ (costante) vale 25320 Nm poiché le somme delle aree imputabili ai termini in seno e coseno, si annullano lungo il periodo.
I punti in corrispondenza dei quali il momento motore uguaglia il momento resistente si ottengono dalla seguente equazione

$$12600 \sin 2J - 15650 \cos 2J = 0$$

da cui

$$J_1 = 32°16' \qquad J_2 = 147°44'$$

Il lavoro di fluttuazione ***L*** vale:

$$L = \int_{32°16'}^{147°44'} (12600 \sin 2J - 15650 \cos 2J) \cdot dJ$$

$$L = 20090 \ \ Nm$$

La variazione massima di velocità **Δω** del volano, indicato con J il momento di inerzia delle masse rotanti, si ottiene dalla seguente relazione

$$L = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(w_{\max}^2 - w_{\min}^2\right) = \frac{J}{2} \cdot 2w_m \cdot \left(w_{\max} - w_{\min}\right)$$

$$\Delta w = \frac{L}{J \cdot w_m} = \frac{20090 \cdot 60}{16000 \cdot 150 \cdot 2p} = 0.08 \ rad/s$$

Bibliografia

John Hannah & R.C.Stephens
Mechanics of Machines (Advanced theory and examples)
Arnlod