

LE VELOCITA' CRITICHE FLESSIONALI

Consideriamo un albero cilindrico a sezione circolare, sorretto alle estremità **B** da due supporti, avente massa propria trascurabile e portante un disco di massa **m** che riterremo equidistante dai due supporti per poter escludere azioni giroscopiche conseguenti all'inflessione dell'albero stesso.

Immaginiamo ora che l'albero sia fatto ruotare con velocità **B** costante **T** e che la centratura del disco sull'albero presenti una imperfezione, ossia che il baricentro **G** del disco si trovi inizialmente, nel sistema a riposo, a una piccola distanza, indicata con **e**, dall'asse di rotazione, ossia dalla congiungente i centri dei perni **A** e **B**. ([Fig1](#))

Supponiamo inoltre che l'asse dell'albero sia verticale e **cib** allo scopo di trascurare l'azione del peso che complicherebbe inutilmente la trattazione senza modificarne sostanzialmente i risultati¹.

Esaminiamo le condizioni di equilibrio di questo sistema ossia l'equilibrio tra la forza centrifuga, dipendente sia dalla ipotizzata eccentricità **B** iniziale **e** sia dalla inflessione elastica prodotta dalla forza stessa, e la reazione elastica dell'albero. Se **C P** il punto in cui, per effetto della suddetta inflessione, viene a portarsi quel punto del disco che inizialmente, con albero fermo, si trovava in **O**, ossia se **OC P** la freccia elastica e **CG = e P** l'eccentricità **B** iniziale, indicata con **k** la costante elastica dell'albero², **P k·OC** la reazione esercitata dall'albero, mentre se **m P** la massa del disco, la forza centrifuga **F_c P**:

¹ Un albero orizzontale si comporta come un flessibile e perciò il disco ruota non intorno all'asse dell'albero non deformato, bensì **X** intorno alla tangente alla linea elastica nel punto in cui l'asse dell'albero interseca il disco nella posizione di riposo (assenza di rotazione).

Ad un livello elementare di trattazione, si può senz'altro concludere che la velocità critica flessionale **P** la stessa per un dato albero, sia esso appoggiato orizzontalmente, sia esso disposto verticalmente. In realtà **B** uno studio più approfondito mostrerebbe che l'effetto del peso può dar luogo, in determinate condizioni di asimmetria, a vibrazioni aggiuntive che modificherebbero i valori della velocità critica. (R.Giovanozzi)

² La costante elastica (rigidità flessionale) dell'albero k_{ij} corrisponde al valore del carico **P** che, applicato nella sezione *i*-esima, **P** in grado di determinare nella sezione *j*-esima una freccia unitaria.

I coefficienti di influenza a_{ij} , che verranno introdotti in seguito, corrispondono al valore della freccia, misurata in corrispondenza della sezione *i*-esima, indotta da un carico unitario applicato nella sezione *j*-esima.

Per il teorema di reciprocità di Maxwell si ha: $a_{ij}=a_{ji}$ $k_{ij}=k_{ji}$

$$F_c = mT^2 \overline{OG}$$

Per l'equilibrio i punti **O**, **C**, **G** debbono essere allineati; inoltre, indicata con $y = OC$ l'inflessione

$$mT^2(y+e) = ky$$

elastica, l'eccentricità totale di **G** risulta:

$$y+e = \overline{OG}$$

$$y = e \frac{T^2}{T_c^2 - T^2} \quad [1]$$

per cui:

avendo posto:

$$T_c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

alla [1] si deduce che la freccia elastica y è funzione di T e tende all'infinito per T tendente a T_c , ossia alla cosiddetta **velocità critica**.

L'eccentricità totale di **G** rispetto all'asse **AB P**:

$$y+e = e \frac{T_c^2}{T_c^2 - T^2}$$

Se riportiamo su un diagramma come ascisse i valori di T/T_c e come ordinate quelli di:

$$\frac{e+y}{e} = \frac{T_c^2}{T_c^2 - T^2} = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_c^2}}$$

otteniamo il diagramma rappresentato nella fig. 2.

- A) per $T < T_c$, $(\mathbf{e}+\mathbf{y})/\mathbf{e}$ cresce con T/T_c e tende all'infinito per T/T_c tendente a 1. In questa situazione \mathbf{y} ed \mathbf{e} hanno lo stesso segno e il punto \mathbf{G} descrive una traiettoria circolare esterna a quella descritta da \mathbf{C} ;
- B) per $T > T_c$, $(\mathbf{e}+\mathbf{y})/\mathbf{e}$ diviene negativo e decresce, in valore assoluto, tendendo a zero per T/T_c tendente a infinito. In questa situazione \mathbf{y} ed \mathbf{e} hanno segno contrario e il punto \mathbf{G} descrive una traiettoria circolare interna a quella descritta da \mathbf{C} ;
- C) per $T \gg T_c$ la freccia \mathbf{y} tende a $-\mathbf{e}$, ossia il baricentro \mathbf{G} tende a disporsi sull'asse di rotazione del sistema.

L'impalcatura teorica che sostiene le conclusioni qui riportate si basa sulla proporzionalità \mathbf{B} tra frecce e deformazioni, ma tale assunto vale solo per valori assai piccoli delle frecce; \mathbf{P} facile comprendere allora che i risultati ottenuti in precedenza non possano essere accettati senza riserve.

E' per altro ovvio che frecce infinite non si possano verificare nella realtà. Le espressioni ottenute vanno interpretate nel senso che, quando \mathbf{T} si avvicina ad \mathbf{T}_c , si produrranno sensibili inflessioni che oltrepasseranno i limiti di proporzionalità³, cioè \mathbf{P} i limiti che, di regola, non possono superarsi senza compromettere la stabilità \mathbf{B} dell'albero.

Si vede inoltre che mentre per $T < T_c$, $\mathbf{y}+\mathbf{e}=\mathbf{OG}$ ha lo

³ ossia si supererà ampiamente il campo elastico

stesso senso di $\mathbf{e}=\mathbf{CG}$, per $T > T_c$ detti segmenti hanno sensi opposti; ossia i tre punti allineati O, C e G , mentre nel primo caso sono posti nell'ordine $O C G$, nel secondo sono nell'ordine $O G C$, e crescendo T l'eccentricit**B** del baricentro del disco diminuisce⁴.

Nel caso teorico di $\mathbf{e} = 0$, cio**P** di perfetta centratura iniziale, la [1] ci dice che la freccia elastica $\mathbf{y P}$ sempre nulla, eccetto che per $T = T_c$, nel qual caso \mathbf{y} assume un'espressione indeterminata, ossia pub assumere un valore qualsiasi.

Cib si spiega col fatto che in tali condizioni, essendo

$$T^2 = \frac{k}{m}$$

per un valore qualsiasi della freccia \mathbf{y} , il valore $k\mathbf{y}$ della reazione elastica centripeta uguaglia quello della

⁴ Queste considerazioni teoriche sono confortate dal reale comportamento dell'albero. L'esperienza difatti insegna che non appena si supera la velocit**B** critica, il disco inverte spontaneamente la posizione relativa dei punti O, C e G , la rotazione ridiventa tranquilla, e la freccia di inflessione \mathbf{y} diminuisce man mano che aumenta la velocit**B** angolare.

Questo fatto indusse De Laval a escludere nelle sue turbine l'impiego di grossi alberi (che avrebbero consentito di elevare il valore di T_c al di sopra della T di esercizio), e a preferire l'adozione di alberi notevolmente flessibili (con un valore basso di T_c) rotanti a una velocit**B** T maggiore di quella critica.

La comprensione del comportamento reale dell'albero a velocit**B** maggiore di quella critica, e quindi la vera natura della questione, **P** ostacolata dalla falsa credenza che il fenomeno della velocit**B** critica sia strettamente affine a quello dell'instabilit**B** delle travi caricate di punta; e che percib quando $T > T_c$ l'equilibrio dell'albero non sia pij possibile, come non lo **P** nel carico di punta quando $P > P_{cr}$.

I fenomeni che si manifestano negli alberi rotanti sono di natura ben diversa e pij complessa da quello dell'instabilit**B** delle travi caricate di punta. Per cui le analogie sono soltanto formali e riguardano alcuni risultati analitici e non il comportamento reale.

La differenza forse pij decisiva si ha fra l'equilibrio indifferente di una trave compressa assialmente da $P=P_{cr}$ e quello di un albero, privo di eccentricit**B**, che ruota con velocit**B** $T = T_{cr}$. Se la trave aumenta la sua deformazione, l'energia totale rimane invariata, perché aumenta l'energia elastica di flessione e diminuisce di altrettanto quella di posizione di P_{cr} ; quindi la deformazione pub crescere senza che sia necessario l'apporto di energia dall'esterno. Invece l'aumento della deformazione dell'albero rotante richiede aumenti sia dell'energia elastica sia dell'energia cinetica; per cui la flessione pub crescere soltanto se c'è apporto di energia dall'esterno

(O.Belluzzi)

forza centrifuga $m\Gamma^2y$. Si hanno perciò, almeno nei limiti delle piccole deformazioni, condizioni di equilibrio indifferenti.

LE VELOCITA' CRITICHE COME RISONANZE FLESSIONALI

La trattazione elementare presentata al precedente paragrafo non riesce, tra l'altro, a spiegare per quale intervento il baricentro **G** possa passare dall'esterno all'interno del segmento **OC**.

In effetti abbiamo considerato solamente l'equilibrio tra la reazione elastica dell'albero e la forza centrifuga applicata al baricentro **G** del disco. Tuttavia in corrispondenza di velocità **B** prossime a quella critica le frecce subiscono notevoli variazioni, cosicché la massa applicata in **G** si trova sottoposta non solo alla accelerazione centripeta, ma anche alla accelerazione complementare di Coriolis⁵ che potrebbe giustificare il 'ribaltamento' del disco.

Per comprendere appieno il fenomeno dobbiamo allora fare ricorso ad un modello più soddisfacente di quello introdotto al punto precedente.

Si assuma perciò ora come riferimento fisso la terna **O>0**, la cui origine **O** coincida, quando l'albero **P** fermo, col centro **C** del disco (fig4).

Quando il sistema considerato viene messo in rotazione, essendo il disco posto nella mezzeria dell'albero, il moto del disco **P** un moto piano e il piano di riferimento

⁵ E' possibile mostrare che il moto relativo di un sistema di riferimento rispetto ad un altro può essere scomposto in un moto traslatorio e in uno rotatorio.

In questo caso del tutto generale l'accelerazione assoluta **P** sempre uguale alla risultante della accelerazione relativa, di quella di trascinamento e della accelerazione complementare o di Coriolis.

$$a_a = a_r + a_t + 2T/v_r$$

La accelerazione complementare scompare quando **T=0**, **v_r=0** oppure quando i vettori **T** e **v_r** sono paralleli.

\mathbf{O} contiene la traiettoria di \mathbf{C} .

Il moto del disco può essere quindi considerato come risultante di un moto di traslazione di \mathbf{C} , incognito, e di una rotazione con velocità angolare \mathbf{T} intorno a \mathbf{C} . (fig.4)

Le coordinate di \mathbf{G} risultano perciò determinate dalle seguenti relazioni:

$$x_G = x + e \cos Tt$$

$$y_G = y + e \sin Tt$$

Le equazioni del moto della massa m del disco, concentrata in \mathbf{G} , tenuto conto degli effetti smorzanti, sono le seguenti:

$$m \frac{d^2 x_G}{dt^2} + F \frac{dx_G}{dt} + kx_G = 0$$

$$m \frac{d^2 y_G}{dt^2} + F \frac{dy_G}{dt} + ky_G = 0$$

dove:

k = rigidità dell'albero;

F = coefficiente di smorzamento viscoso.

E' infine agevole ottenere, per sostituzione, le equazioni del moto del punto \mathbf{C} nelle direzioni x e y :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + kx = meT^2 \cos Tt$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + F \frac{dy}{dt} + ky = meT^2 \sin Tt$$

Tali equazioni mettono in evidenza che questo modello studia i due moti suddetti come vibrazioni forzate che il punto \mathbf{C} compie per effetto delle componenti, $meT^2 \cos Tt$

e $m\omega^2 \sin \theta$, della forza centrifuga $m\omega^2 r$ secondo gli assi di riferimento x e O rispettivamente (fig.5 fig.6).

La risoluzione⁶ delle equazioni differenziali rappresentative del moto del punto C porta alle seguenti conclusioni:

- 1) il punto C descrive una traiettoria circolare, con velocità uguale (in intensità e verso) a ω , di centro O e raggio R dato da⁷:

$$R = e \frac{\frac{T^2}{T_{cr}^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_{cr}^2}\right)^2 + \left(2 \frac{F}{F_{cr}} \frac{T}{T_{cr}}\right)^2}}$$

- 2) durante la rotazione del disco, la deformazione dell'albero $OC=R$ è in ritardo di fase rispetto alla causa $F_c = m\omega^2 r$, che la determina, di un angolo Φ , dato da:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{2 \frac{F}{F_{cr}} \frac{T}{T_{cr}}}{1 - \frac{T^2}{T_{cr}^2}}$$

Tale angolo di fase dipende dal valore di σ/σ_{cr} e da quello di ω/ω_{cr} e quindi, per un assegnato sistema, cioè per assegnati valori di σ , σ_{cr} e ω_{cr} il valore di Φ dipende solo da ω .

E' importante sottolineare che per $F=0$, il raggio R coincide con il valore della freccia y definita al

⁶ Si veda l'appendice matematica

⁷ Nelle formule seguenti si P posto:

$$T_{cr} = T_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad F_{cr} = F_n = \sqrt{mk}$$

paragrafo precedente: in entrambi i casi \mathbf{y} e \mathbf{R} rappresentano i raggi delle traiettorie circolari descritte dal centro del disco.

Inoltre, sempre nell'ipotesi di $\mathbf{F}=\mathbf{0}$, la velocità \mathbf{B} critica, definita come quella velocità \mathbf{B} in corrispondenza della quale il raggio \mathbf{R} della traiettoria tende all'infinito, risulta essere data da:

$$T_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e coincide con il valore determinato al paragrafo precedente.

Per essere interessante, a questo punto, studiare l'andamento di \mathbf{M} al variare di T/T_{cr} e per diversi valori di F/F_{cr}

□ $\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad T < T_{cr}$

L'angolo di fase Φ risulta uguale a zero e quindi durante la rotazione il segmento $CG=e$ ruoterà in fase col segmento $OC=R$

□ $\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad T > T_{cr}$

L'angolo di fase Φ risulta uguale a π e quindi durante la rotazione i punti O , C , G risultano ancora allineati, ma il punto G si muove lungo una circonferenza interna a quella descritta da C : il raggio di questa circonferenza è pari a $(R-e)$

□ $\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad T \text{ tendente a infinito}$

La deformazione \mathbf{R} tende a $-e$ ed il baricentro \mathbf{G} del disco tende a portarsi in O

□ $\sigma \neq \mathbf{0} \quad \omega < \omega_{cr}$

L'angolo di fase Φ è diverso da zero e minore di $\pi/2$: il disco ruota

secondo una traiettoria circolare, col segmento \mathbf{CG} ruotato di un angolo Φ , rispetto al segmento \mathbf{OC} , nel verso della rotazione dell'albero

□ $\sigma \neq 0 \quad \omega = \omega_{cr}$

Quando l'albero ruota praticamente alla velocità critica, il segmento \mathbf{CG} risulta ruotato di un angolo pari a $\pi/2$ rispetto al segmento \mathbf{OC} , sempre nel verso della rotazione del sistema.

□ $\sigma \neq 0 \quad \omega > \omega_{cr}$

Per velocità superiori alla critica, l'angolo di fase è superiore a $\pi/2$ e quindi il baricentro descrive una traiettoria interna a quella descritta da \mathbf{C} . Anche in questo caso per $\omega \rightarrow \infty$, $\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{e}$ ed il baricentro \mathbf{G} del disco tende a disporsi sull'asse dei cuscinetti ed a coincidere quindi con \mathbf{O} (fig7 fig.8).

Da quanto detto si può concludere che il moto del sistema risulta costituito da due moti (fig.9):

- 1) Un moto di traslazione del disco, che risulta a sua volta dalla composizione di due oscillazioni armoniche, dirette lungo due assi ortogonali, di pulsazione \mathbf{T} pari alla velocità angolare \mathbf{B} del sistema.

Per effetto di questi due moti il centro \mathbf{C} del disco descrive una traiettoria circolare con velocità angolare pari a \mathbf{T} : un diametro generico della sezione dell'albero si muove quindi lungo una

traiettoria circolare restando parallelo a se stesso.

Questo moto viene indicato come moto di precessione sincrona o '*direct whirling*'.

- 2) Una rotazione del disco intorno a **C** con velocità **B** angolare **T**.

Si deduce perciò che il moto complessivo del disco **P** tale che l'albero rivolge verso l'interno della traiettoria sempre le stesse fibre; essendo d'altra parte la traiettoria descritta da **C** una circonferenza, si deduce che la sollecitazione flessionale dell'albero risulta, in ogni sezione e per una assegnata velocità **B** angolare, costante durante la rotazione.

Contrariamente a quanto si poteva immaginare, l'effetto centrifugo della massa rotante, provoca una sollecitazione di flessione 'statica' non inducendo, tra l'altro, fenomeni di affaticamento !

METODO ANALITICO DELLA DETERMINAZIONE DELLE VELOCITA' CRITICHE FLESSIONALI (ALBERI CON PIU' MASSE)

Consideriamo un albero sul quale siano applicate n masse m_i ($i=1,2,\dots,n$) di cui supponiamo nulla l'inerzia trasversale.

La freccia nella sezione i -esima sar**B** quella dovuta alle forze centrifughe di tutte le n masse, cio**P** indicando con a_{ik} il generico coefficiente di influenza (vedi nota 2), potremo scrivere:

$$y_1 = T^2(a_{11}m_1y_1 + a_{12}m_2y_2 + \dots + a_{1n}m_ny_n)$$

$$y_i = T^2(a_{i1}m_1y_1 + a_{i2}m_2y_2 + \dots + a_{in}m_ny_n)$$

$$y_n = T^2(a_{n1}m_1y_1 + a_{n2}m_2y_2 + \dots + a_{nn}m_ny_n)$$

.....

e posto $a_{ij}m_j = \alpha_{ij}$ si ha:

$$T^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \frac{1}{T^2} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \frac{1}{T^2} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \frac{1}{T^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$T^2(A - I \frac{1}{T^2})y = 0$$

Il sistema omogeneo sopra riportato pu**b** avere una soluzione diversa dalla banale $y_1=y_2=\dots=0$ solo se il

rango⁸ della matrice dei coefficienti \mathbf{P} minore di \mathbf{n} , ovvero se, posto $\mathbf{T}^2 = 1/8$:

$$\det(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}) = 0 \quad \text{con } \mathbf{I} = \text{matrice identit}\mathbf{B}$$

La determinazione delle velocit \mathbf{B} critiche si riduce allora alla determinazione degli autovalori della matrice quadrata \mathbf{A} .

Si pu \mathbf{b} dimostrare che gli \mathbf{n} autovalori sono tutti reali e positivi. Ad ognuno di questi corrisponde una ennupla di valori \mathbf{y}_i , non tutti nulli, definiti a meno di un coefficiente di proporzionalit \mathbf{B} (autovettore), cio \mathbf{P} corrisponde *una certa forma* della linea elastica dell'albero, avente fra gli appoggi un numero di nodi pari all'ordine \mathbf{r} della velocit \mathbf{B} critica corrispondente meno uno. Per la prima velocit \mathbf{B} critica \mathbf{T}_1 , la linea elastica non ha alcun punto di flesso (nodo), per la seconda ha un nodo intermedio e cos \mathbf{X} via...

Osserviamo infine che una linea elastica qualsiasi pu \mathbf{b} sempre considerarsi come combinazione lineare delle \mathbf{n} linee elastiche (autovettori) corrispondenti alle \mathbf{n} velocit \mathbf{B} critiche.

⁸ Il rango di una matrice \mathbf{A} \mathbf{P} uguale al massimo ordine fra tutte le sottomatrici quadrate di \mathbf{A} con determinante diverso da zero

PROCEDIMENTO DI CALCOLO

Da quanto detto ai punti precedenti, emerge che la determinazione delle velocità critiche e la individuazione della forma della linea elastica si riduce alla determinazione degli autovalori (e degli autovettori associati) della matrice \mathbf{A} con elemento generico a_{ij} pari $a_{ij}m_j$. Poiché le masse m_j sono note, non ci resta che determinare i coefficienti di influenza a_{ij} .

Ogni trave può essere schematizzata in n tronchi (fig.10) ad ognuno dei quali \mathbf{P} associata una matrice di rigidezza.

$$K = EI \begin{vmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{vmatrix}$$

La matrice \mathbf{K} permette di stabilire una relazione tra sollecitazioni e deformazioni. Sempre con riferimento al tronco elementare rappresentato in precedenza, si ha:

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = |K| \begin{Bmatrix} v_1 \\ z_1 \\ v_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad [2]$$

Quando siamo in presenza di p_{ij} tronchi la matrice di rigidezza globale si ottiene sommando **opportunamente** le matrici di rigidezza elementari, ossia tenendo presente, ad esempio, che il nodo sinistro (destro) di un tronco coincide con nodo destro (sinistro) del tronco successivo.

$$K_i = EI_i \begin{Bmatrix} \frac{12}{L_i^3} & -\frac{6}{L_i^2} & -\frac{12}{L_i^3} & -\frac{6}{L_i^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L_i^2} & \frac{4}{L_i} & \frac{6}{L_i^2} & \frac{2}{L_i} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L_i^3} & \frac{6}{L_i^2} & \frac{12}{L_i^3} & \frac{6}{L_i^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L_i^2} & \frac{2}{L_i} & \frac{6}{L_i^2} & \frac{4}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{i+1} = EI_{i+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{L_{i+1}^3} & -\frac{6}{L_{i+1}^2} & -\frac{12}{L_{i+1}^3} & -\frac{6}{L_{i+1}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L_{i+1}^2} & \frac{4}{L_{i+1}} & \frac{6}{L_{i+1}^2} & \frac{2}{L_{i+1}} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{L_{i+1}^3} & \frac{6}{L_{i+1}^2} & \frac{12}{L_{i+1}^3} & \frac{6}{L_{i+1}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L_{i+1}^2} & \frac{2}{L_{i+1}} & \frac{6}{L_{i+1}^2} & \frac{4}{L_{i+1}} \end{vmatrix}$$

La [2] stabilisce una relazione del tutto generale tra deformazioni e sollecitazioni senza tener conto per **b** dei vincoli. La matrice di rigidezza del sistema, tenuto conto dei vincoli, corrisponde alla **matrice globale generale K** in cui si siano eliminate le righe e le colonne corrispondenti alle deformazioni la cui entità **B** **P** imposta dalla natura del vincolo e non dalla rigidezza del sistema o dai carichi esterni. Questa matrice viene denominata **matrice di rigidezza depurata**.

L'inversa della matrice di rigidezza depurata corrisponde alla matrice i cui elementi sono i coefficienti di influenza da inserire nella matrice A.

SCHEMATIZZAZIONE DEL CALCOLO

Il procedimento di calcolo può essere allora così schematizzato:

- 1) si divide la trave in n tronchi elementari, e per ogni tronco si scrive la matrice di rigidezza elementare;
- 2) si assembla la matrice di rigidezza globale;
- 3) si determina, tramite l'eliminazione di righe e colonne corrispondenti a deformazioni imposte dai vincoli, la matrice di rigidezza depurata;
- 4) si inverte la matrice di cui al punto precedente;
- 5) si moltiplica l'inversa ottenuta per la matrice diagonale delle masse rotanti. Si ottiene in tal modo la matrice A ;
- 6) si determinano gli autovalori (δ) e gli autovettori di A ;
- 7) le velocità critiche si ottengono dalla seguente relazione:

$$\delta_i = \frac{1}{T_i^2}$$

Appendice matematica

Alberi con massa diffusa con continuità (numero delle masse infinito).

Passiamo adesso a considerare il caso in cui l'albero possieda una propria massa diffusa con continuità lungo la lunghezza e ricerchiamo al solito la velocità critica.

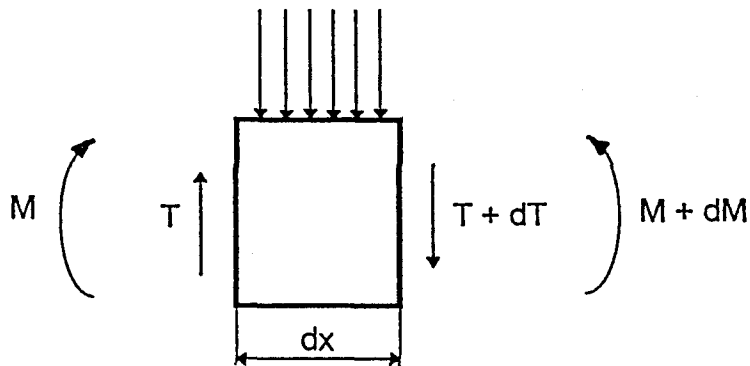
Se l'albero, che supponiamo, per fissare le idee, pieno e a sezione circolare, ruota con velocità angolare ω , è sottoposto, in un tratto elementare di lunghezza dx , ad una forza centrifuga elementare

$$dF = \rho S y \omega^2 dx$$

dove y rappresenta la freccia

(ρ = densità del materiale, $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ area della sezione dell'albero, di diametro d)

Ma l'intensità del carico ripartito in una trave inflessa è uguale a



$$dM = T dx$$

$$\frac{dM}{dx} = T$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dT}{dx}$$

dove

$$dT = -dF = -\rho S y \omega^2 dx$$

$$\frac{dT}{dx} = -\rho S y \omega^2$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\rho S y \omega^2$$

poiché

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$$

si ha

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} = \rho S y \omega^2 = EJ \frac{d^4 y}{dx^4}$$

da cui

$$\rho S y \omega^2 dx = EJ \frac{d^4 y}{dx^4} dx$$

o anche, posto

$$k^4 = \rho \frac{S \omega^2}{EJ},$$

si ha

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - k^4 y = 0$$

che rappresenta l'equazione omogenea del 4° ordine, che si può integrare ponendo

$$y = e^{\alpha x} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \alpha^4 e^{\alpha x}$$

si ha

$$\alpha^4 e^{\alpha x} - k^4 e^{\alpha x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \pm k^2 \begin{cases} \alpha = \pm k \\ \alpha = \pm ik \end{cases}$$

L'integrale generale di questa equazione vale¹

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx}$$

¹ Dove $e^{ikx} = (\cos kx + i \sin kx)$, $e^{-ikx} = (\cos kx - i \sin kx)$,
 $e^{kx} = (\cos kx + \sin kx)$, ed, $e^{-kx} = (\cos kx - \sin kx)$.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\rho S y \omega^2$$

poiché

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$$

si ha

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} = \rho S y \omega^2 = EJ \frac{d^4 y}{dx^4}$$

da cui

$$\rho S y \omega^2 dx = EJ \frac{d^4 y}{dx^4} dx$$

o anche, posto

$$k^4 = \rho \frac{S \omega^2}{EJ},$$

si ha

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - k^4 y = 0$$

che rappresenta l'equazione omogenea del 4° ordine, che si può integrare ponendo

$$y = e^{\alpha x} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \alpha^4 e^{\alpha x}$$

si ha

$$\alpha^4 e^{\alpha x} - k^4 e^{\alpha x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \pm k^2 \begin{cases} \alpha = \pm k \\ \alpha = \pm ik \end{cases}$$

L'integrale generale di questa equazione vale¹

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx}$$

¹ Dove $e^{ikx} = (\cos kx + i \sin kx)$, $e^{-ikx} = (\cos kx - i \sin kx)$,
 $e^{kx} = (\cos kx + \sin kx)$, ed, $e^{-kx} = (\cos kx - \sin kx)$.

da cui si ricava

$$y = C_1(\cos kx + \sin kx) + C_2(\cos kx - \sin kx) + C_3(\cos kx + i \sin kx) + C_4(\cos kx - i \sin kx)$$

quindi

$$y = A \sin(kx) + B \cos(kx) + C \operatorname{Sen}(kx) + D \operatorname{Cos}(kx)$$

Le costanti di integrazione A, B, C, D, si determinano con le condizioni al contorno.

Ad esempio, nel caso di un albero appoggiato agli estremi, dovendo in quest'ultimi annullarsi il momento, (che è uguale alla derivata seconda della freccia), e la freccia medesima, si ha

$$y'' = y = 0 \text{ per } x=0 \text{ e per } x=1$$

Si trovano così le quattro relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} B + D &= 0 \\ -B + D &= 0 \end{aligned}$$

$$A \sin(kl) + B \cos(kl) + C \operatorname{Sen}(kl) + D \operatorname{Cos}(kl) = 0$$

$$-A \sin(kl) - B \cos(kl) + C \operatorname{Sen}(kl) + D \operatorname{Cos}(kl) = 0$$

Dalle prime due si deduce

$$B = D = 0$$

e quindi, dalle due ultime,

$$C = 0$$

Deve dunque essere

$$A \sin(kl) = 0$$

da cui $A=0$ che, peraltro, è da escludere se non si vuol cadere nel caso banale $y=0$

$$\sin(kl) = 0$$

oppure

$$kl = n\pi$$

la quale condizione definisce la velocità critica.
Ricordando il significato di k si ha dunque, per $n=1$,

$$\rho \frac{S\omega_c^2}{EJ} = \frac{\pi^4}{l^4}$$

e quindi

$$\omega_c = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$$

In generale per tutti i casi di vincolo, la i -esima velocità critica è espressa, per alberi di acciaio, da una formula del tipo

$$\omega_{ci} = 12,81 * 10^5 \frac{mm}{sec} \beta_i^2 \frac{d}{l^2}$$

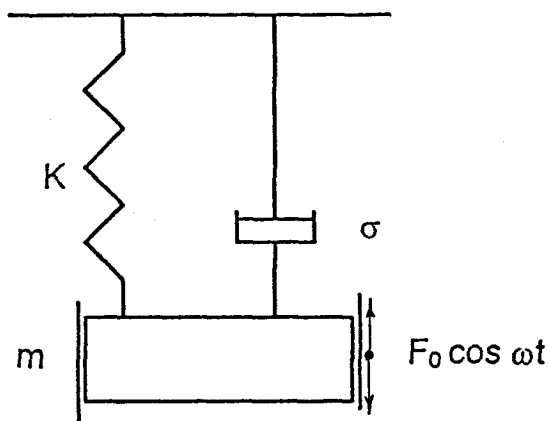
in cui β_i è un coefficiente variabile con le condizioni di vincolo dell'albero, relativo alla i -esima velocità critica.

CONDIZIONI DI VINCOLO	β_1	β_2	β_3
Albero incastrato ad un estremo e libero nell'altro	1.875	4.694	7.855
Albero appoggiato ai due estremi	π	2π	3π
Albero incastrato ad un estremo ed appoggiato nell'altro	3.927	7.069	10.21
Albero incastrato ai due estremi	4.73	7.853	10.996

VIBRAZIONI FORZATE ARMONICHE

Considerando il sistema sotto raffigurato, l'equazione del moto risulta essere:

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad [A1]$$



L'integrale generale della [A1] è dato da:

$$x(t) = x_1(t) + x_f(t)$$

con:

$x_1(t)$ integrale generale dell'omogenea associata

$x_f(t)$ integrale particolare

Limitandoci a considerare il moto $x(t)$ a transitorio quasi esaurito, ovvero quando il moto libero $x_1(t)$ è ormai trascurabile, si può porre:

$$x(t) = x_f(t) = X_f \cos(\omega t - \Phi) \quad [A2]$$

in cui le costanti incognite X_f e Φ vengono determinate sostituendo la [A2] nella [A1]

$$\begin{aligned} -m\omega^2 X_f \cos(\omega t - \Phi) - \sigma\omega X_f \sin(\omega t - \Phi) + kX_f \cos(\omega t - \Phi) &= \\ = F_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

relazione che deve essere soddisfatta per ogni valore di t ; e in particolare per:

$$Tt - M = 0 \quad \rightarrow \quad (k - mT^2)X_f = F_0 \cos M$$

$$Tt - M = \frac{B}{2} \quad \rightarrow \quad -FTX_f = F_0 \sin M$$

da cui:

$$\operatorname{tg} M = \frac{FT}{(k - mT^2)}$$

$$X_f = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mT^2)^2 + (FT)^2}}$$

Introducendo i rapporti adimensionali:

$$\frac{F}{F_{cr}} \quad \text{con} \quad F_{cr} = 2\sqrt{mk}$$

$$\frac{T}{T_{cr}} \quad \text{con} \quad T_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

si ottiene:

$$\operatorname{tg} M = \frac{2 \frac{F}{F_{cr}} \frac{T}{T_{cr}}}{1 - \frac{T^2}{T_{cr}^2}} \quad [A3]$$

$$X_f = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_{cr}^2}\right)^2 + \left(2 \frac{F T}{F_{cr} T_{cr}}\right)^2}}$$

Posto:

$$x_{st} = \frac{F_0}{k}$$

Si ottiene infine:

$$x_f(t) = x_{st} A \cos(Tt - M)$$

con :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_{cr}^2}\right)^2 + \left(2 \frac{F T}{F_{cr} T_{cr}}\right)^2}}$$

Tramite le precedenti relazioni **P** ora facilmente possibile integrare le equazioni differenziali che esprimono le velocità critiche risonanze flessionali. Con riferimento alla simbologia definita nel relativo paragrafo si ha:

$$x(t) = x_{st} A \cos(Tt - M)$$

$$0(t) = 0_{st} A \sin(Tt - M_0)$$

con:

$$x_{st} = 0_{st} = \frac{m e T^2}{k}$$

$$A_0 = A_{>} = A$$

$$tgM_{>} = tgM_0 = tgM$$

Posto:

$$>(t) = K1 \cos(Tt - M)$$

$$O(t) = K2 \sin(Tt - M)$$

Poiché:

$$K1 = K2 = R$$

si deduce che il punto C descrive una traiettoria circolare di centro O e raggio R.

$$>^2(t) + O^2(t) = R^2$$

La suddetta traiettoria **P** descritta con velocità **B** angolare **T**, uguale quindi alla velocità **B** con la quale il disco ruota intorno a C.

Risulta inoltre:

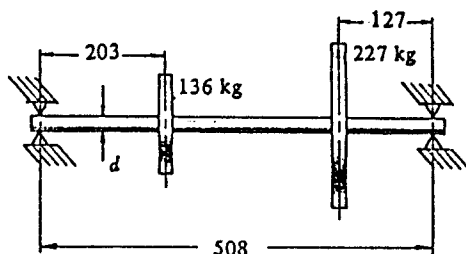
$$\frac{O(t)}{>(t)} = tg(Tt - M)$$

Questa relazione (vedi fig.5) mette in evidenza che la deformazione dell'albero forma con l'asse > un angolo pari a (Tt - M).

La deformazione dell'albero **P** in ritardo di fase, rispetto alla causa che la determina, di un angolo M definito dalla [A3].

ESEMPIO 1

Si determinino le velocità critiche flessionali per l'albero rappresentato in figura. Si trascuri la massa propria e si ponga il modulo di elasticità normale E pari a 179144 N/mm^2 .



$$d = 57 \text{ mm}$$

Matrice di rigidezza globale MG

1.0e+009 *

Columns 1 through 8

0.0001	-0.0135	-0.0001	-0.0135	0	0	0	0
-0.0135	1.8291	0.0135	0.9145	0	0	0	0
-0.0001	0.0135	0.0003	-0.0041	-0.0002	-0.0176	0	0
-0.0135	0.9145	-0.0041	3.9151	0.0176	1.0430	0	0
0	0	-0.0002	0.0176	0.0007	-0.0170	-0.0005	-0.0345
0	0	-0.0176	1.0430	-0.0170	5.0097	0.0345	1.4618
0	0	0	0	-0.0005	0.0345	0.0005	0.0345
0	0	0	0	-0.0345	1.4618	0.0345	2.9237

Matrice di rigidezza depurata (tolte le righe/colonne in corrispondenza dei vincoli) MD

1.0e+009 *

1.8291	0.0135	0.9145	0	0	0
0.0135	0.0003	-0.0041	-0.0002	-0.0176	0
0.9145	-0.0041	3.9151	0.0176	1.0430	0
0	-0.0002	0.0176	0.0007	-0.0170	-0.0345
0	-0.0176	1.0430	-0.0170	5.0097	1.4618
0	0	0	-0.0345	1.4618	2.9237

Inversa della matrice di rigidezza depurata MDI

1.0e-004 *

0.0000	-0.0018	0.0000	-0.0011	0.0000	0.0000
-0.0018	0.2710	-0.0004	0.1829	0.0012	0.0016
0.0000	-0.0004	0.0000	-0.0005	0.0000	0.0000
-0.0011	0.1829	-0.0005	0.1655	0.0009	0.0015
0.0000	0.0012	0.0000	0.0009	0.0000	0.0000
0.0000	0.0016	0.0000	0.0015	0.0000	0.0000

Vettore delle masse applicate CA

0	136	0	227	0	0
---	-----	---	-----	---	---

MDI*CA'

0	0.0000	0	0.0000	0	0
0	0.0037	0	0.0042	0	0
0	0.0000	0	0.0000	0	0
0	0.0025	0	0.0038	0	0
0	0.0000	0	0.0000	0	0
0	0.0000	0	0.0000	0	0

Matrice finale con adeguamento delle unità di misura MF

1.0e-005 *

0.3685	0.4152
0.2487	0.3757

Autovalori di MF

1.0e-005 *

0.0507
0.6935

Velocità Critiche

rad/sec

n.giri/l'

1.0e+003 *

1.0e+004 *

1.4041

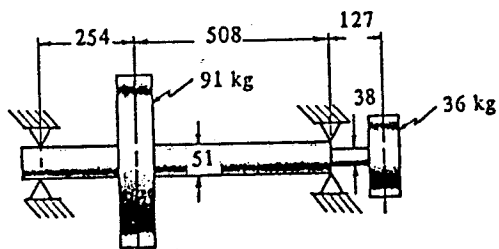
1.3408

0.3797

0.3626

ESEMPIO 2

Si determinino le velocità critiche flessionali per l'albero rappresentato in figura. Si trascuri la massa propria e si ponga il modulo di elasticità normale E pari a 205600 N/mm^2



Matrice di rigidezza globale MG

$1.0e+009 *$

Columns 1 through 8

0.0000	-0.0063	0.0000	-0.0063	0	0	0	0
-0.0063	1.0752	0.0063	0.5376	0	0	0	0
0.0000	0.0063	0.0001	0.0048	0.0000	-0.0016	0	0
-0.0063	0.5376	0.0048	1.6128	0.0016	0.2688	0	0
0	0	0.0000	0.0016	0.0001	-0.0062	-0.0001	-0.0078
0	0	-0.0016	0.2688	-0.0062	1.2004	0.0078	0.3314
0	0	0	0	-0.0001	0.0078	0.0001	0.0078
0	0	0	0	-0.0078	0.3314	0.0078	0.6628

Matrice di rigidezza depurata (tolte le righe/colonne in corrispondenza dei vincoli) MD

$1.0e+009 *$

1.0752	0.0063	0.5376	0	0	0
0.0063	0.0001	0.0048	-0.0016	0	0
0.5376	0.0048	1.6128	0.2688	0	0
0	-0.0016	0.2688	1.2004	0.0078	0.3314
0	0	0	0.0078	0.0001	0.0078
0	0	0	0.3314	0.0078	0.6628

Inversa della matrice di rigidezza depurata MDI

1.0e-003 *

0.0000	-0.0005	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000
-0.0005	0.1067	-0.0002	0.0004	-0.0533	0.0004
0.0000	-0.0002	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000
0.0000	0.0004	0.0000	0.0000	-0.0005	0.0000
0.0002	-0.0533	0.0002	-0.0005	0.0924	-0.0009
0.0000	0.0004	0.0000	0.0000	-0.0009	0.0000

Vettore delle masse applicate CA

0	91	0	0	36	0
---	----	---	---	----	---

MDI*CA'

0	0.0000	0	0	0.0000	0
0	0.0097	0	0	-0.0019	0
0	0.0000	0	0	0.0000	0
0	0.0000	0	0	0.0000	0
0	-0.0049	0	0	0.0033	0
0	0.0000	0	0	0.0000	0

Matrice finale con adeguamento delle unità di misura
MF

0.0097	-0.0019
-0.0049	0.0033

Autovalori di MF

Velocità critiche

1.0e-004 *

0.1093
0.0210

rad/sec

302.4404 689.6306

n.giri/1'

2.8881 6.5855

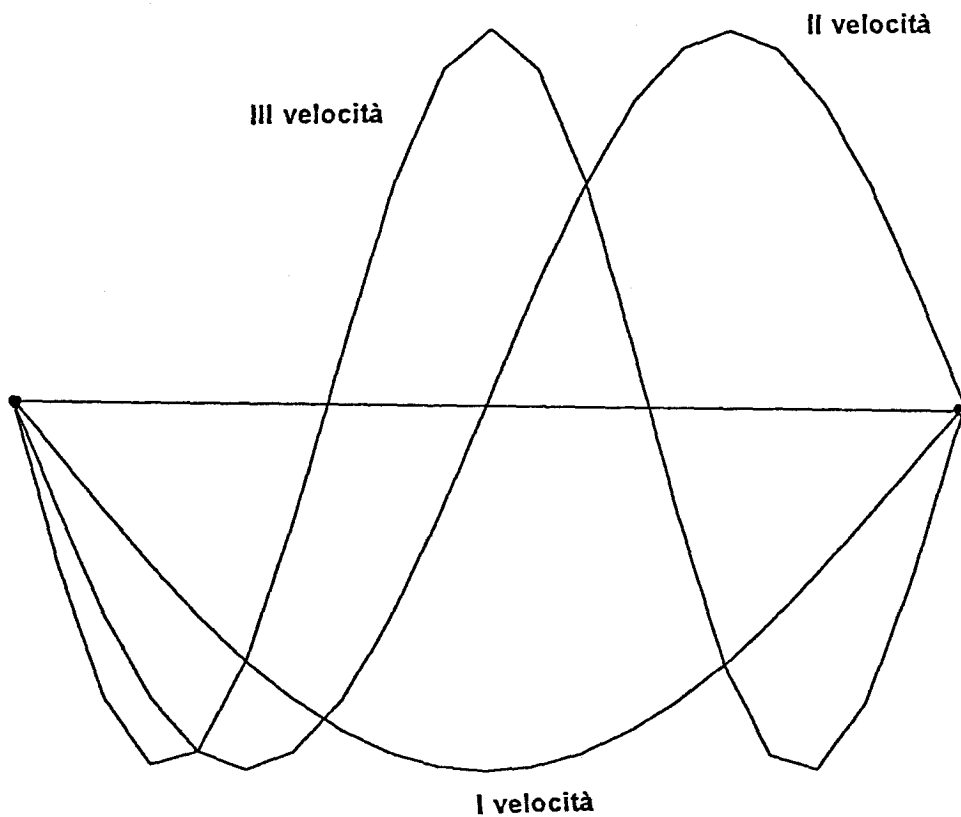
1.0e+003

ESEMPIO 3

Determinazione delle deformati corrispondenti alle prime tre velocità flessionali.

Trave appoggiata agli estremi e massa diffusa con continuità

N. 20 tronchi



```

% ITIS OMAR Dipartimento di Meccanica
% Calcolo delle velocità critiche flessionali con metodo matriciale
% Non vengono considerati gli effetti raddrizzanti dei volani

```

34

```

% cancella tutte le variabili
clear all

% cancella lo schermo e presenta la maschera 1
clc
maschl
nt=input( 'inserisci il numero di tronchi ');

% costruisco una matrice nulla di dimensione (nt*2)+2

for i=1 : (nt*2)+2
    for j=1 : (nt*2)+2
        H(i,j)=0;
    end
end

MP=M;

% costruisco un vettore nullo destinato a contenere le masse proprie
for i=1:(nt*2 +2)
    mp(i)=0;
end

% inserisco le caratteristiche dei tronchi

for i=1:nt
    clc
    maschl
    al=[' Inserimento tronco n. ', num2str(i)];
    disp(al)
    l(i)=input(' lunghezza      [mm]      ');
    d(i)=input(' diametro      [mm]      ');
    e(i)=input(' modulo elasticita [N/mm^2] ');
    mv(i)=input(' massa volumica [kg/dm^3] ');
    f(i)=(pi*e(i)*d(i)^4)/64;
    ma=mv(i)*((pi*d(i)^2)/4)*l(i)*(1/(2*10^6));
    mp(i*2-1)=mp(i*2-1)+ma;
    mp(i*2+1)=mp(i*2+1)+ma;
end

% memorizzo la matrice di rigidezza elementare (a meno dei coefficienti f(i) )
mi=[12,-6,-12,-6;-6,4,6,2;-12,6,12,6;-6,2,6,4];

% memorizzo gli esponenti di l (lunghezza tronco) all'interno della matrice di rigidezza
ee=[3 2 3 2;2 1 2 1; 3 2 3 2;2 1 2 1];

% assemblo la matrice di rigidezza globale
for a=0:nt-1
    for i=(a*2+1):(a*2+1)+3
        for j=(a*2+1):(a*2+1)+3
            H(i,j)=H(i,j)+mi(i-(a*2),j-(a*2))*f(a+1)/(l(a+1)^ee(i-(a*2),j-(a*2)));
        end
    end
end
end

```

```

% inserisco le righe e le colonne da eliminare
% si tratta delle righe e delle colonne corrispondenti ai vincoli della trave
clc
maschl
nc=input(' Inserisci il numero totale di righe o colonne da elidere ');
for i=1:nc
    el(i)=input(' inserisci la colonna da elidere ');
end
% memorizzo el in elp
elp=el;

% costruisco un vettore contenente tutte le colonne
for i=1:(nt*2)+2
    v(i)=i;
end

% costruisco un vettore v1 con righe e colonne da mantenere
k=1;
kk=0;
[b,c]=size(el);
for i=1:(nt*2+2)
    if k <= c
        if v(i)==el(k)
            k=k+1;
        else
            kk=kk+1;
            v1(kk)=v(i);
        end
    else
        kk=kk+1;
        v1(kk)=v(i);
    end
end

M=M(:,v1);
M=M(v1,:);
MD=M;
% ricavo l'inversa della matrice depurata
M2=inv(M);
MDI=M2;

% costruisco un vettore di carichi tutti nulli
[b,c]=size(v1);
for i=1:c
    ca(i)=0;
end

% inserisco i valori delle masse applicate (non considero i momenti)
clc
maschl
for i=1:c
    if v1(i)/2 ~= round(v1(i)/2)
        a2=[num2str((v1(i)+1)/2), ' [kg] '];
        a1=[' inserisci la massa al nodo n.', a2];
        ca(i)=input(a1);
        ca(i)=ca(i)+mp(v1(i));           % sommo le eventuali masse proprie
    else
        end
end
end

% moltiplico ogni riga della matrice depurata per le rispettive masse

```

```

for i=1:c
    for j=1:c
        M1(i,j)=M2(i,j)*ca(j);
    end
end

NDIC=M1;
% elimino righe e colonne superflue ( in corrispondenza di masse nulle)
% costruisco un vettore el contenente righe/colonne da elidere

clear el
[b c]=size(ca);
clc
k=0;
for i=1:c
    if ca(i)==0
        k=k+1;
        el(k)=i;
    end
end

% costruisco un vettore contenente tutte le colonne
[d e]=size(M1);
clear v
for i=1: e
    v(i)=i;
end

% costruisco un vettore v1 con righe e colonne da mantenere
clear v1
k=1;
kk=0;
[b,c]=size(el);
for i=1:e
    if k <= c
        if v(i)==el(k)
            k=k+1;
        else
            kk=kk+1;
            v1(kk)=v(i);
        end
    else
        kk=kk+1;
        v1(kk)=v(i);
    end
end

% scrivo la matrice depurata

M1=M1(:,v1);
M1=M1(v1,:);
MF=M1;
% adegua le unità di misura m --> mm
M1=M1/1000;

% determino gli autovalori di M1
au=eig(M1)

% calcolo gli omega
[b c]=size(au);
for i=1:b
    om(i)=sqrt(1/au(i));
end

```

```

% calcolo dei numeri dei giri
for i=1:b
    ng(i)=(om(i)*60)/(2*pi);
end

% calcolo autovalori e autovettori
% in X si trovano n colonne corrispondenti a n autovalori distinti
% tali colonne rappresentano, a meno di un fattore di scala la deformata
% della trave in corrispondenza della n-esima velocità critica

% Y è una matrice diagonale in cui Y(ii) rappresenta l'i-esimo autovalore
[X,Y]=eig(M1);

% calcolo della deformata nei nodi scarichi
% moltiplico i carichi per il rispettivo autovettore
% lavoro al più sulle deformate relative alle prime tre velocità critiche
% NOTA: l'ultimo autovettore si riferisce all'ultimo autovalore CIOE' ALLA
% PRIMA VELOCITA' CRITICA

[b c]=size(ca);
[l g]=size(X);
min=1;
kk=3;
for j=min:g
    k=1;
    for i=1:c
        if ca(i)==0
            cap(j,i)=ca(i);
        else
            cap(j,i)=ca(i)*X(k,j);
            k=k+1;
        end
    end
end

% se la matrice cap ha più di tre righe ne prendo le prime tre
[b c]=size(cap);
if b > 3
    cap=cap(1:3,:);
end

% calcolo delle deformazioni prodotte dai carichi 'amplificati' per le deformate
[b c]=size(cap);
for i=1:b
    de(:,i)=inv(M)*cap((b-i+1),:);
end

% inserimento delle deformazioni imposte dai vincoli
[p q]=size(de);
[b c]=size(elp);
for j=1:q
    k=1;
    e=1;
    for i=1:(nt*2 +2)
        if k <= c
            if i==elp(k)
                ff(i,j)=0;
                k=k+1;
            else
                ff(i,j)=de(e,j);
                e=e+1;
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    else
        ff(i,j)=de(e,j);
        e=e+1;
    end
end
end
end

```

```

% separazione delle colonne di ff prendendo solo gli elementi con secondo indice
% dispari (step 2) [trascuro le rotazioni]

```

```

[m n]=size(ff);
for j=1:n
    k=1;
    for i=1:2:m
        fg(k,j)=ff(i,j);
        k=k+1;
    end
end
end

```

```

% normalizzazione delle colonne delle deformate

```

```

[m n]=size(fg);
for i=1:n
    nor(i)=norm(fg(:,i));
end
for j=1:n
    for i=1:m
        fgn(i,j)=fg(i,j)/nor(j);
    end
end
end

```

BIBLIOGRAFIA

- O.Belluzzi Scienza delle costruzioni vol.4
Zanichelli
- G.Corbetta Meccanica Generale ed Applicata
Paravia
- R.Giovannozzi Costruzione di macchine vol.2
Patron
- Guido
Della Pietra Lezioni di meccanica delle macchine
vol.1,2
CUEN
- A.S.Hall ... Costruzione di macchine
Etas Libri
- H.C.Martin Introduction to matrix methods of
structural analysis
McGraw-Hill
- O.Sesini Meccanica applicata alle macchine IV
Ambrosiana

INDICE

Le velocit B critiche flessionali.....	1
Le velocit B critiche come risonanze flessionali...	7
Metodo analitico della determinazione delle velocit B critiche flessionali (alberi con p_{ij} masse).....	15
Procedimento di calcolo.....	17
Schematizzazione di calcolo.....	20
Appendice matematica	
Alberi con massa diffusa con continuit B	21
Vibrazioni forzate armoniche.....	25
Esempio 1.....	29
Esempio 2.....	31
Esempio 3.....	33
Listato dell'algoritmo risolutivo.....	34
Bibliografia.....	39

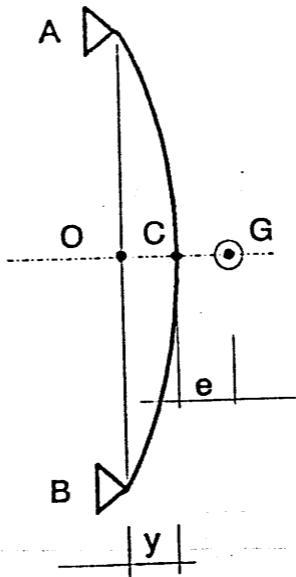


fig. 1

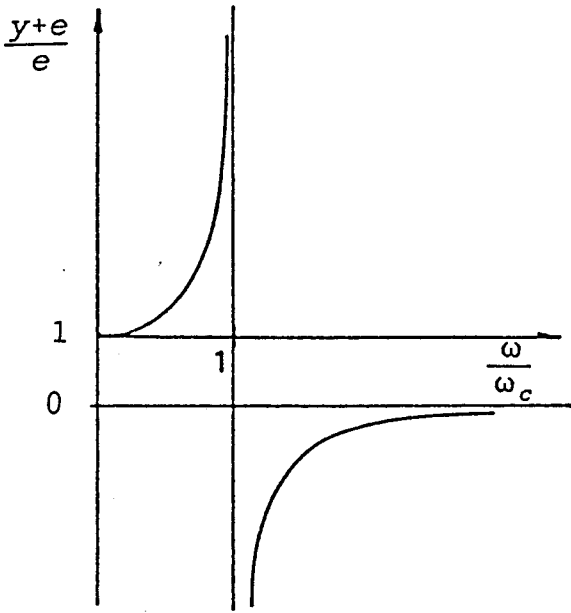


fig. 2

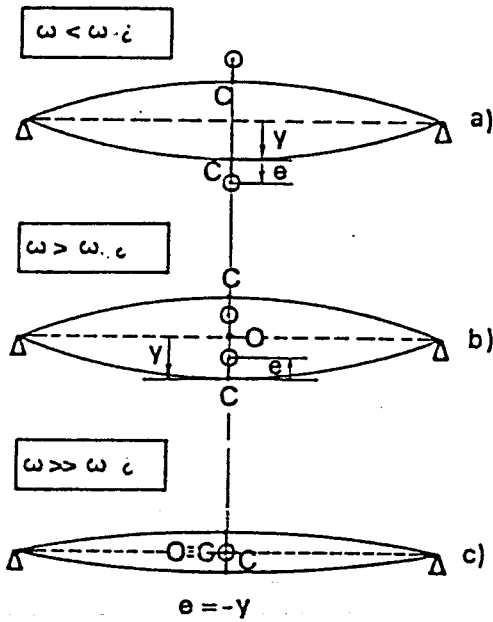
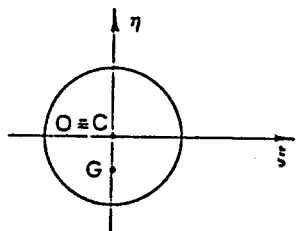
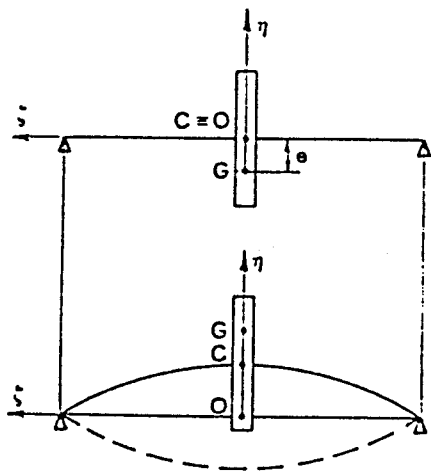
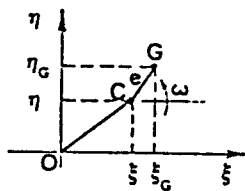


fig. 3



a)



b)

fig. 4

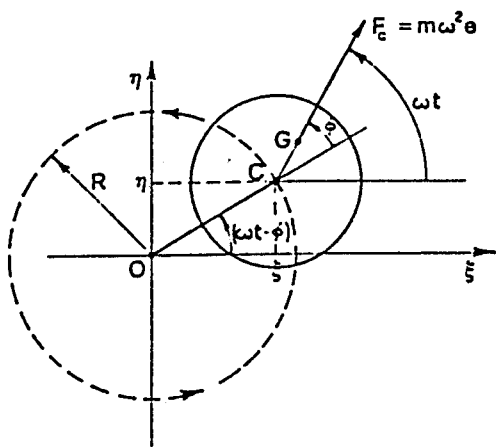


fig. 5

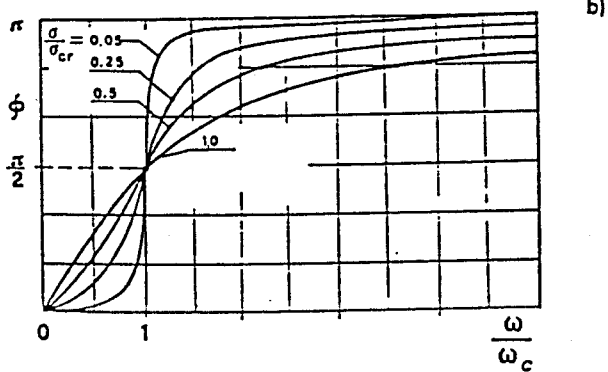
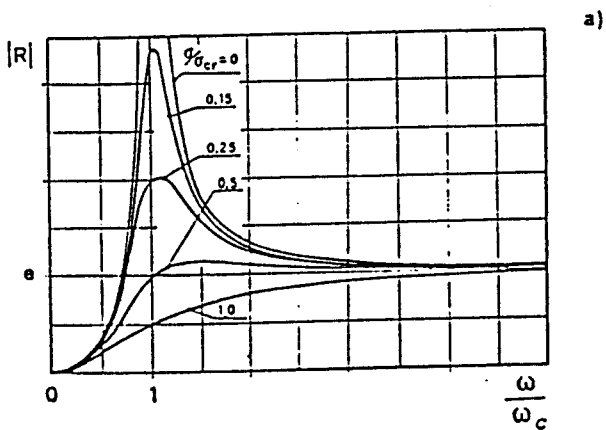


fig. 6

$$\sigma = 0$$

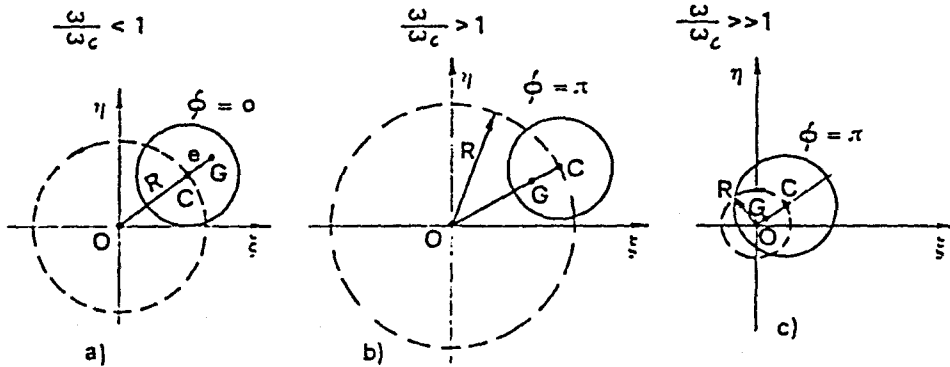


fig. 7

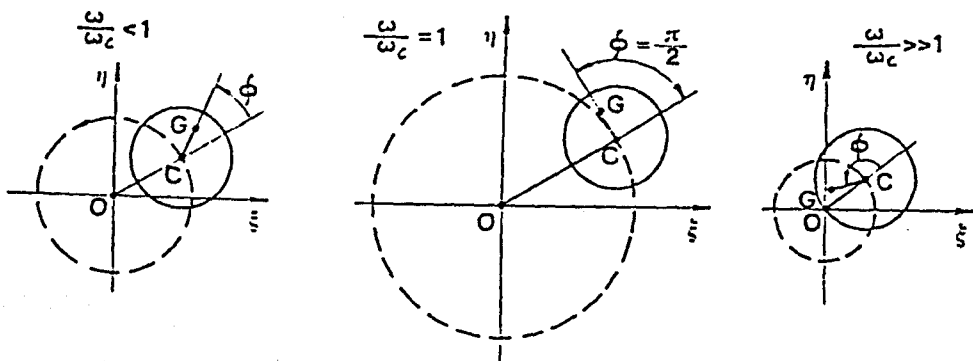


fig. 8

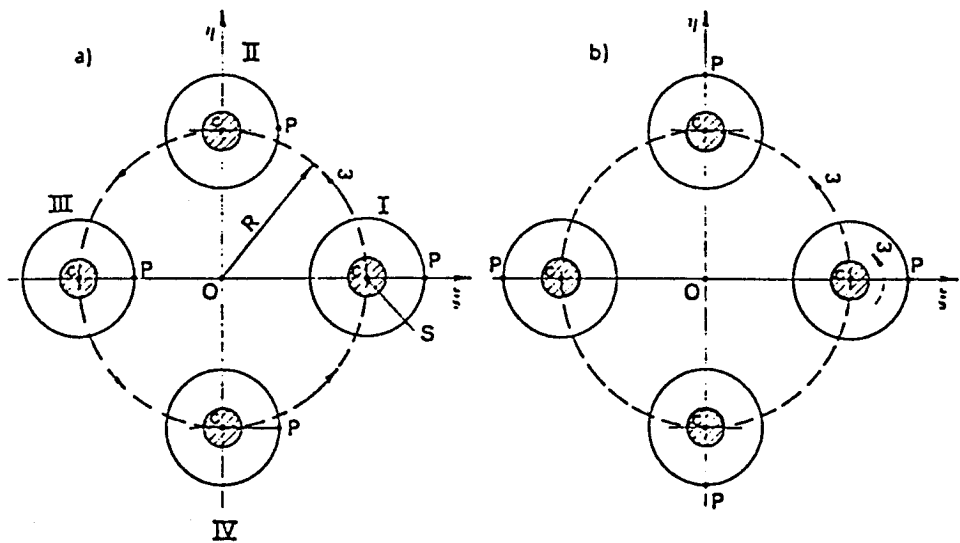


fig. 9

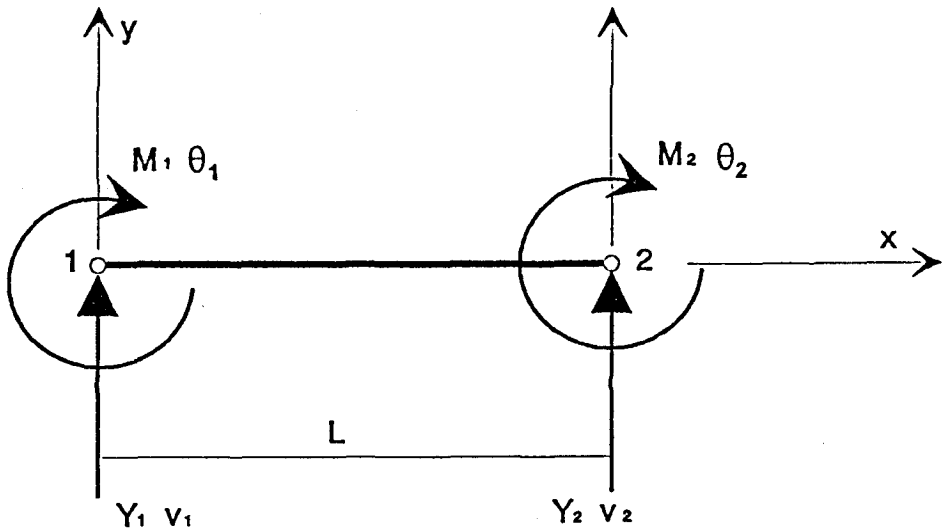


fig. 10