Studio cinematico della manovella a glifo oscillante

Il meccanismo a glifo oscillante, detto anche meccanismo di Fairbain, trasforma il moto rotatorio della manovella nel moto rettilineo alternativo dello slittone e permette che la corsa di ritorno a vuoto sia più veloce di quella attiva.

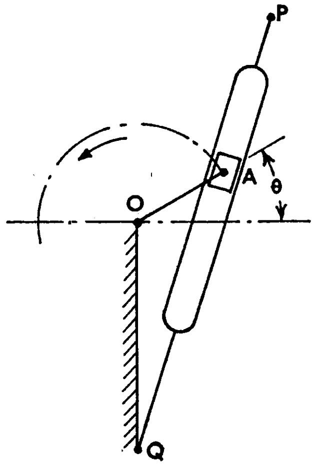


Fig. 1

Sia

ω	la velocità angolare della manovella OA
Ω	la velocità angolare del braccio QP
ξ	il rapporto OQ/OA
Φ	l'angolo OQA

Dal triangolo OQA dal teorema dei seni si scrive:

$$\frac{OA}{\sin\Phi}=\frac{OQ}{\sin\left[180-\left(90+q+\Phi\right)\right]}=\frac{OQ}{\cos\left(q+\Phi\right)}$$

$$\sin\Phi=\frac{1}{x}\cdot\cos\left(q+\Phi\right)=\frac{1}{x}\cdot\left(\cos q\,\cos\Phi-\sin q\,\sin\Phi\right)$$

$$x=\frac{\cos q}{\tan\Phi}-\sin q$$

$$\tan\Phi=\frac{\cos q}{x+\sin q} \qquad [1]$$

Derivando membro a membro la [1] rispetto al tempo si ottiene:

$$\left(1+\tan^2\Phi\right)\cdot\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{x\sin q+1}{\left(x+\sin q\right)^2}\cdot\frac{dw}{dt}$$

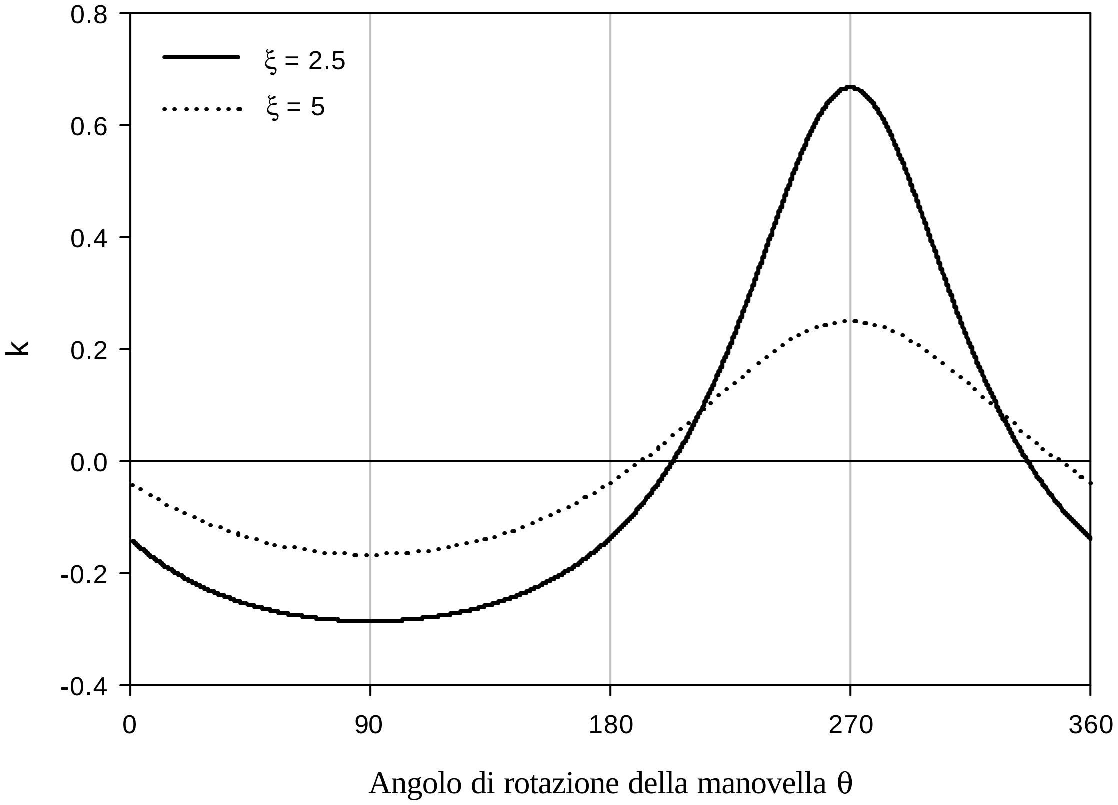
e per definizione di Φ e ω si ha

$$\left(1+\tan^2\Phi\right)\cdot\Omega=-\frac{x\sin q+1}{\left(x+\sin q\right)^2}\cdot w \qquad [2]$$

Sostituendo nella [2] il valore di $\tan\Phi$ espresso dalla [1] si ha:

$$\Omega=-\frac{x\sin q+1}{2x\sin q+\left(1+x^2\right)} \qquad [3]$$

Fig. 2: rapporto k tra la velocità angolare Ω del braccio
e la velocità angolare ω della manovella

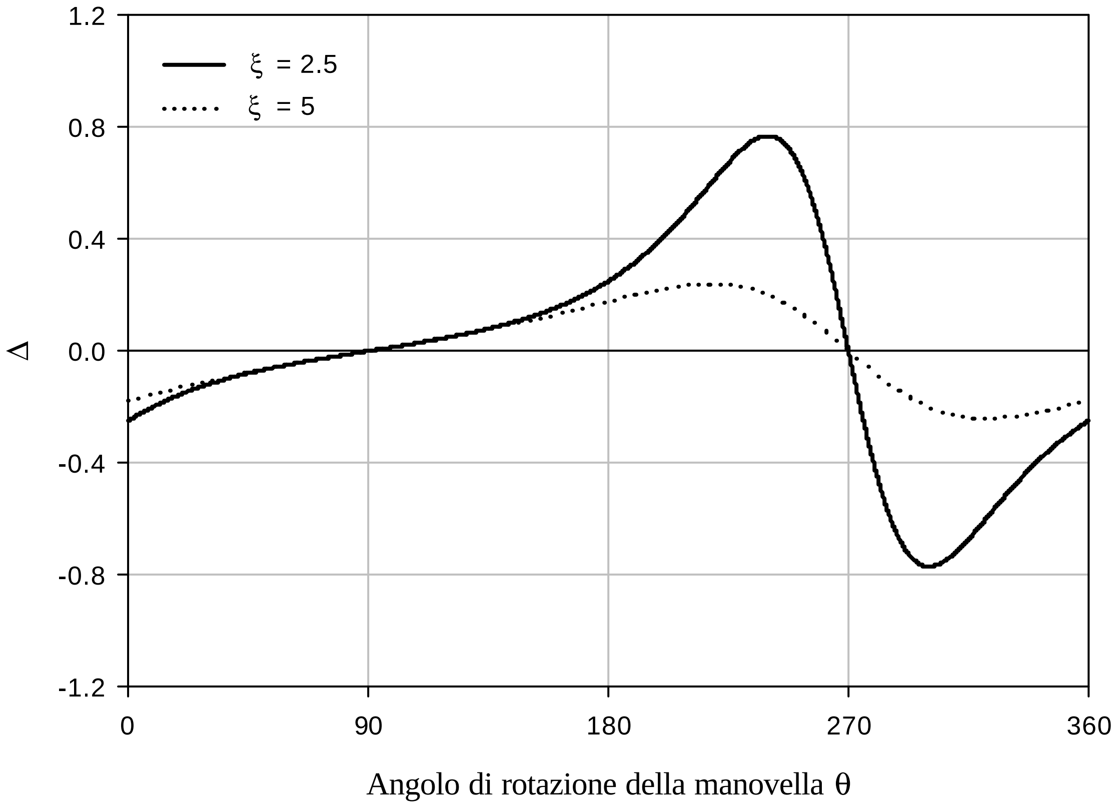


Derivando membro a membro la [3] rispetto al tempo si ottiene[1]:

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\left(x^3-x\right)\cdot\cos q}{\left(2x\sin q+1+x^2\right)^2}\cdot w^2 \qquad [4]$$

[1] Dalla Fig. 2 e/o dalla [4] si ricava che la velocità Ω presenta un massimo e un minimo in corrispondenza di un angolo di manovella θ pari rispettivamente a 270 e 0°

Fig. 3: rapporto Δ tra l'accelerazione angolare ($d\Omega/dt$) del braccio e il quadrato della velocità angolare ω della manovella

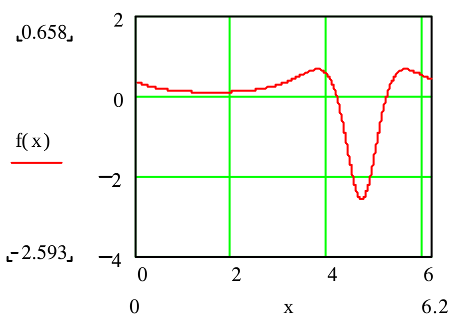


Derivando ulteriormente la [4] rispetto al tempo si ottengono gli angoli di manovella in corrispondenza dei quali l’accelerazione angolare assume valori massimi e/o minimi[2]

2

$$\frac{d}{dx}\frac{-\left(\xi^3-\xi\right)\cdot\cos(x)}{\left(2\cdot\xi\cdot\sin(x)+1+\xi^2\right)^2}$$

$$-\left(-\xi^3+\xi\right)\cdot\frac{\sin(x)}{\left(2\cdot\xi\cdot\sin(x)+1+\xi^2\right)^2}-4\cdot\left(-\xi^3+\xi\right)\cdot\frac{\cos(x)^2}{\left(2\cdot\xi\cdot\sin(x)+1+\xi^2\right)^3}\cdot\xi$$



La figura sopra rappresentata mostra l’andamento della derivata prima per $\xi = 2.5$. Tale derivata si annulla in corrispondenza di angoli di manovella pari a 4.185 e 5.24 rad . Per $\xi = 5$ il massimo e il minimo si verificano in corrispondenza di angoli di manovella pari a 5.06 e 3.812 rad.

L’accelerazione centripeta di P vale

$$a_{CP} = QP \cdot \Omega^2$$

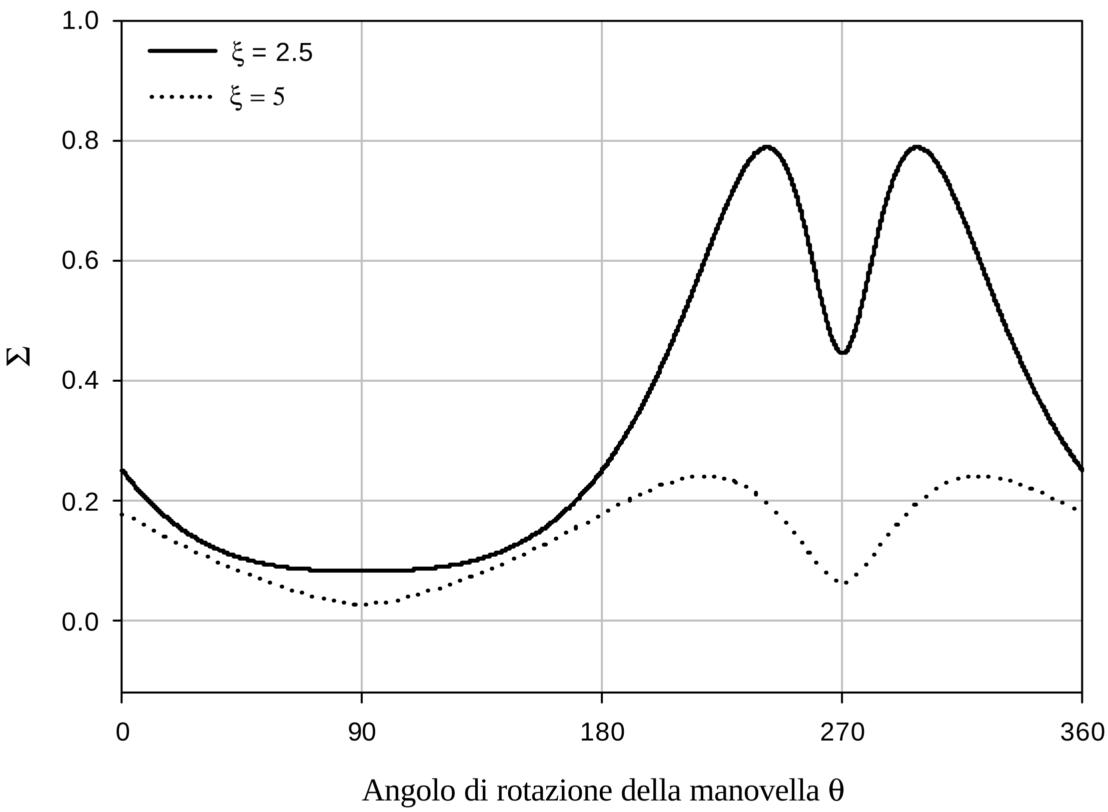
L’accelerazione tangenziale di P vale

$$a_{TP} = QP \cdot \frac{d\Omega}{dt}$$

L’accelerazione totale di P vale:

$$a_P = \sqrt{a_{CP}^2 + a_{TP}^2} = QP \cdot w^2 \cdot \sqrt{\frac{(x \sin q + 1)^4 + \left[\left(x^3 - x\right)\cos q\right]^2}{\left[2x \sin q + \left(1 + x^2\right)\right]^4}} \qquad [5]$$

Fig. 4: rapporto Σ tra l'accelerazione totale di P e il quadrato della velocità angolare ω della manovella (lunghezza del braccio unitaria)



Derivando rispetto al tempo la [5] si ottengono gli angoli di manovella in corrispondenza dei quali l’accelerazione totale raggiunge i valori massimi e minimi[3]

3

$$\frac{d}{dx}\cdot\sqrt{\frac{(x\sin x+1)^4+\left((x^3-x)\cos x\right)^2}{\left(2x\sin x+1+x^2\right)^4}} = f(x)$$

$$f(x) = A(x) + B(x) + C(x)$$

$$A(x) = \frac{1}{\left(2\cdot\left(\frac{(x\sin x+1)^4+(x^3-x)^2\cos^2 x}{\left(2x\sin x+1+x^2\right)^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \qquad B(x) = \frac{4\cdot(x\sin x+1)^3\cdot x\cos x - 2\cdot\left(x^3-x^2\right)\cdot\cos x\cdot\sin x}{\left(2x\sin x+1+x^2\right)^4}$$

$$C(x) = -8\cdot\frac{(x\sin x+1)^4+(x^3-x)^2\cdot\cos^2 x}{\left(2x\sin x+1+x^2\right)^5}\cdot x\cos x$$

Per $\xi = 2.5$ l’accelerazione totale di P raggiunge il massimo in corrispondenza di un angolo di manovella pari a 4.219 e 5.206 rad. Per $\xi = 5$ il massimo viene raggiunto per angoli di manovella pari a 3.817 e 5.606 rad.