ITIS OMAR

Dipartimento di Meccanica

LE CARTE DI CONTROLLO

Carte di Controllo

Le carte di controllo rappresentano uno degli strumenti più importanti per il controllo statistico di qualità.
La carta di controllo è corredata da ***tre rette*** parallele all'asse delle ascisse che esprimono, quella centrale o ***media***, il valore medio della statistica o la sua stima ottenuta in base ai primi **m** campioni, e quelle esterne, dette di ***controllo***, gli estremi della banda di ampiezza pari a sei volte la deviazione standard σ, o la sua stima **s**.
Le carte di controllo possono essere di due tipi:

1) carte di controllo per ***attributi***

    Si usano quando la qualità può essere espressa dalla identificazione di una o più caratteristiche qualitative.

2) carte di controllo per ***variabili***

    Si usano quando la qualità può essere espressa da caratteristiche quantitative.

    Le principali carte di controllo per variabili sono:

    a) carta di controllo per la ***media***

    b) carta di controllo per ***il range***

Carta di controllo per la media (Mean Chart)

Per la costruzione di questa carta di controllo viene considerata una successione di m campioni tutti di ampiezza n. La miglior stima della deviazione standard della popolazione vale:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n\ m} (x_i - \overline{x})^2}{nm-1}}$$

Lo stimatore della media μ della popolazione vale:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n\ m} x_i}{n\ m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{x_i}}{m}$$

La carta di controllo della media sarà allora, ricordando le proprietà della distribuzione di campionamento, caratterizzata dalle seguenti rette:

$$y = \overline{x} \qquad \textit{retta centrale}$$

$$y = \overline{x} \pm 3 \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \textit{rette di controllo}$$

Carta di controllo per il range (Range Chart)

Viene usata quando occorre verificare la variabilità di un processo. La range chart viene realizzata in modo del tutto analogo alla carta di controllo della media.

1) Per ogni campione si determina il range R_i ;

2) si determinano il valore centrale e i limiti superiore e inferiore della carta tramite il valore medio del range.

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m}$$

$$UCL = \overline{R}\, D_4 \qquad LCL = \overline{R}\, D_3$$

I valori di D_4 e D_3 sono tabellati in funzione della numerosità n dei campioni.[1]

[1] Il range è uno stimatore distorto di σ. Il valore atteso di R e la deviazione standard del range campionario possono essere espressi in funzione della σ.

$$E(R) = d_2\, \sigma \qquad \sigma_R = d_3\, \sigma$$

dove d_2 e d_3 sono costanti tabellate in funzione di n (numerosità campionaria).
La miglior stima di σ è:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nm} (x_1 - \overline{x})^2}{nm-1}}$$

La linea centrale sarà definita da $\mathbf{d_2 s}$, mentre i limiti superiori e inferiori saranno definiti dalle seguenti relazioni:

$$UCL = d_2 s + 3 d_3 s$$

$$LCL = d_2 s - 3 d_3 s$$

Il valore atteso del range può anche essere stimato dal suo valore medio. In tal caso le linee caratteristiche saranno identificate dalle seguenti relazioni:

$$Linea\ \ centrale: \qquad \overline{R}$$

$$UCL: \quad \overline{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\overline{R} = \overline{R}\left(1+3\frac{d_3}{d_2}\right) = \overline{R}\, D_4$$

$$LCL: \quad \overline{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\overline{R} = \overline{R}\left(1-3\frac{d_3}{d_2}\right) = \overline{R}\, D_3$$

CARTE DI CONTROLLO PER ATTIBUTI (p-Chart)

In alcuni casi, oltre alla misura quantitativa di determinate cartteristiche, può essere importante minitorare la proporzione **p** di prodotti che presentano alcuni difetti.
Come nel caso delle x-chart, campioni casuali di **n** prodotti sono selezionati in modo casuale dalla linea di produzione a specificati intervalli di tempo.
Per ciascun campione viene determinato la proporzione di elementi difettosi

$$p_i = \frac{y_i}{n_i}$$

dove con $\mathbf{y_i}$ si indica il numero di pezzi difettosi presenti nel campione i-esimo.
Le proporzioni campionarie $\mathbf{p_i}$ vengono poi riportate su un grafico sulle cui ascisse sono riportati i tempi.
La linea centrale (CL) e i limiti superiori (UCL) e inferiori (LCL) sono posizionate come segue:

$$CL = \overline{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{m}$$

$$UCL = \overline{p} + 3\hat{s}_{\overline{p}} = \overline{p} + 3 \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

$$LCL = \overline{p} - 3\hat{s}_{\overline{p}} = \overline{p} - 3 \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

ESEMPIO

CARTE DI CONTROLLO PER VARIABILI

Alla fine di ogni ora, per un periodo di 20 ore, vengono esaminati i diametri di quattro alberi costituenti il campione di controllo orario. Le misure ottenute sono riportate in tabella1.

Si costruiscano le carte di controllo della media e del range e se ne discutino i risultati.

Numerosità campionaria (4) ⇒ n

Numero di campioni (20) ⇒ m

Tabella 1

SN	*Sample Measurements*			
1	1.505	1.499	1.501	1.488
2	1.496	1.513	1.512	1.501
3	1.516	1.485	1.492	1.503
4	1.507	1.492	1.511	1.491
5	1.502	1.491	1.501	1.502
6	1.502	1.488	1.506	1.483
7	1.489	1.512	1.496	1.501
8	1.485	1.518	1.494	1.513
9	1.503	1.495	1.503	1.496
10	1.485	1.519	1.503	1.507
11	1.491	1.516	1.497	1.493
12	1.486	1.505	1.487	1.492
13	1.510	1.502	1.515	1.499
14	1.495	1.485	11.493	1.503
15	1.504	1.499	1.504	1.500
16	1.499	1.503	1.508	1.497
17	1.501	1.493	1.509	1.491
18	1.497	1.510	1.496	1.500
19	1.503	1.526	1.497	1.500
20	1.494	1.501	1.508	1.519

Indicata con $\mathbf{x_i}$ la misura del diametro si ha:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n\cdot m} x_i}{m} = 1.50045$$

Indicato con $\mathbf{R_i}$ il range ($R_i = x_{max} - x_{min}$) dell'i-esimo campione si ha:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n\cdot m} R_i}{m} = 0.01985$$

La stima della deviazione standard campionaria **s** vale:

$$\hat{s}_{\overline{x}} = \frac{S}{\sqrt[2]{n}} = \frac{\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n\cdot m} (x_i - \overline{x})^2}}{\sqrt[2]{n(n \cdot m - 1)}} = 0.009244$$

I valori di UCL e LCL per la Media valgono:

$$UCL = \overline{x} + 3\hat{s}_{\overline{x}} = 1.51432$$

$$LCL = \overline{x} - 3\hat{s}_{\overline{x}} = 1.48658$$

I valori di UCL e LCL per il Range sono funzione dei valori tabellati D_3 e D_4.

In mancanza di tabelle, in prima approssimazione i valori di D_3 e D_4 possono ricavarsi dalle seguenti relazioni:

per n <= 6 $D_3 = 0$

per n > 6

$$D_3 = -\frac{0.1677n - 1}{0.422 + 0.2622n} \qquad D_4 = \frac{2.147 + n}{0.703n - 0.134}$$

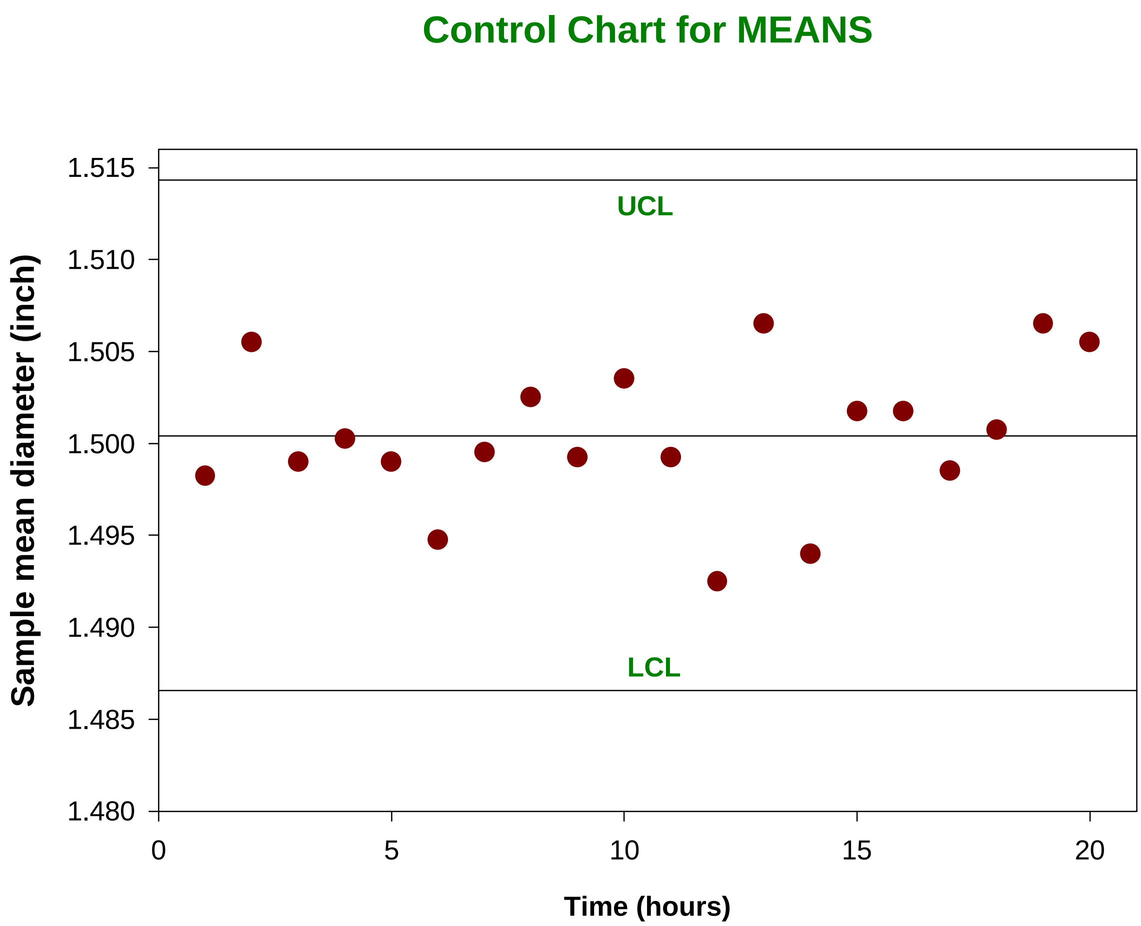
Per n=4 si ha:

$D_3=0$ $D_4=2.297$

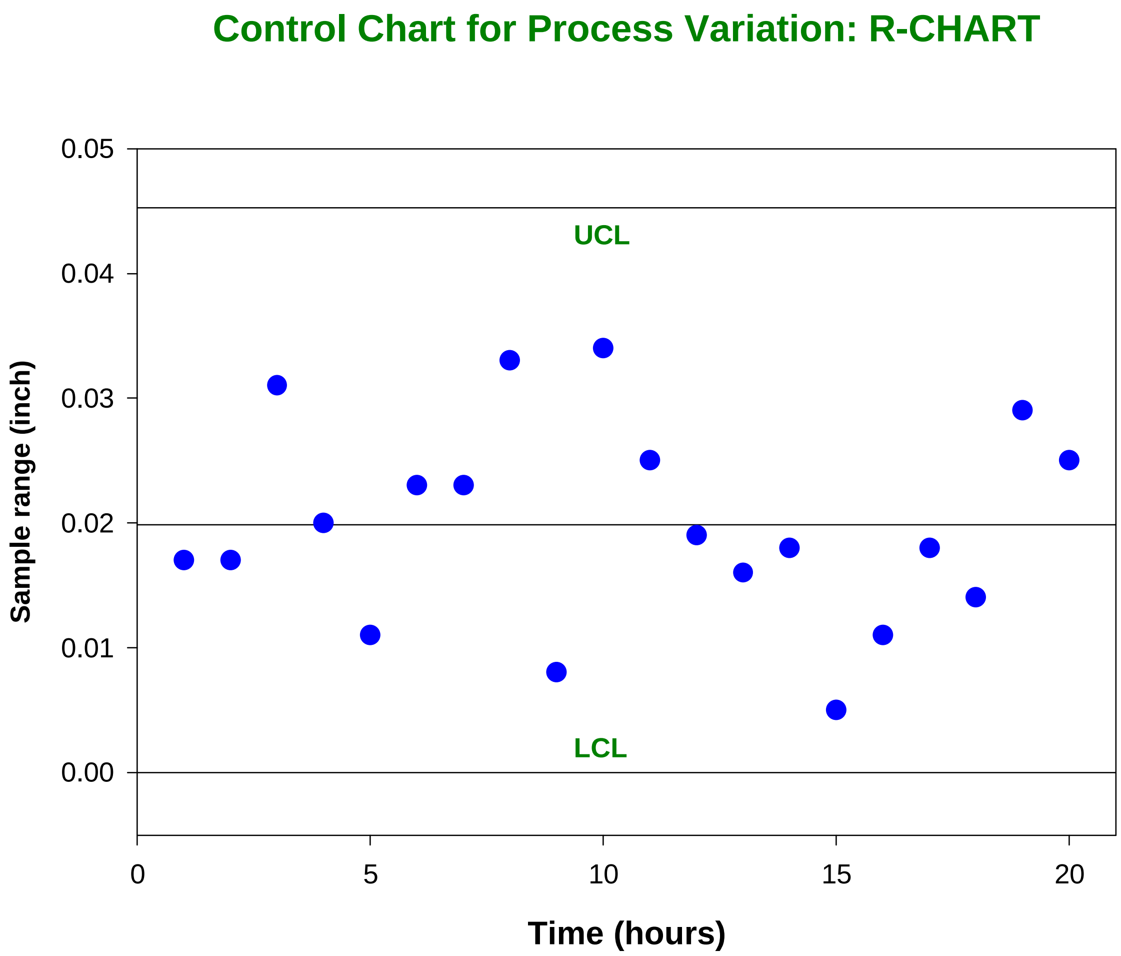
da cui:

UCL = 0.0456

LCL = 0



Control Chart for MEANS
Sample mean diameter (inch)
1.515
1.510
1.505
1.500
1.495
1.490
1.485
1.480
UCL
LCL
0
5
10
15
20
Time (hours)


Control Chart for Process Variation: R-CHART
UCL
LCL
Sample range (inch)
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0
5
10
15
20
Time (hours)

ANALISI DELLE CARTE

L'analisi delle due carte non segnalano anomalie del processo di produzione di entità tale da richiedere interventi correttivi.

Non emergono altresì elementi tali avvalorare la presenza di una 'tendenza di processo' non casuale[1].

[1]Anche se in modo piuttosto schematico e semplicistico, possiamo statisticamente sospettare la presenza di una tendenza non casuale quando si verificano una o più delle seguenti condizioni:

- G sette o più punti consecutivi sono posti al di sopra o al di sotto della linea centrale
- G almeno (10/11o 12/14 o 14/17) punti sono posti tutti al di sopra o al di sotto della linea centrale

INTERPRETAZIONE STATISTICA DELL'ANALISI DELLE CARTE DI CONTROLLO

Lo scopo delle carte di controllo è di evidenziare anomalie nei processi produttivi. Se il processo produttivo è controllato, la probabilità che la media campionaria cada entro i limiti di controllo è molto elevata. Ciò è dovuto al **Teorema del Limite Centrale** che assicura che la distribuzione campionaria delle medie possa essere approssimata, per campioni di numerosità sufficientemente elevata, da una distribuzione normale con media coincidente con la media della popolazione e deviazione standard campionaria pari al rapporto tra la deviazione standard del campione e la radice quadrata della numerosità campionaria.

Conseguentemente la probabilità che una media campionaria cada entro i limiti di controllo definiti ai punti precedenti è approssimativamente pari a 0.997[1].

Pertanto quando una media campionaria esce dai limiti di controllo siamo 'quasi certi' che qualche elemento sia intervenuto ad alterare il processo produttivo.

In termini statistici, definita l'ipotesi nulla H_0 (il processo produttivo è in controllo), qualora una media campionaria esca dai limiti , possiamo ritenere di avere elementi sufficienti per rifiutare l'ipotesi nulla.

Tuttavia il rifiuto dell'ipotesi nulla, essendo parte di un processo statistico inferenziale, implica sempre la possibilità di un errore di primo tipo (il rifiuto dell' ipotesi nulla quando essa è in realtà vera). Con i limiti di controllo definiti in precedenza tale errore è molto basso, intorno al 3 per mille[2].

Quando tutte le medie campionarie cadono all'interno dei limiti di controllo possiamo concludere di non avere elementi sufficienti per rifiutare l'ipotesi nulla. Anche questo tipo di conclusione implica la possibilità di un errore (che questa volta chiameremo di secondo tipo) conseguente al non rifiuto dell'ipotesi nulla quando questa è nella realtà falsa.

Nell'esame delle carte di controllo, la probabilità di compiere un errore di secondo tipo rimane indefinita[3], per cui il mancato rifiuto dell'ipotesi nulla deve essere accettato con estrema cautela.

.

---

[1] Infatti i limiti sono stabiliti dalle seguenti relazioni:

$$UCL = \bar{x} + 3\hat{s}_{\bar{x}}$$

$$LCL = \bar{x} - 3\hat{s}_{\bar{x}}$$

[2] 0.003 = 1- 0997

[3] La probabilità di commettere un errore di secondo tipo è infatti funzione oltre che della numerosità campionaria e della probabilità di compiere un errore di primo tipo anche della quantificazione dell'ipotesi alternativa che in questa tipologia di problemi rimane indefinita.

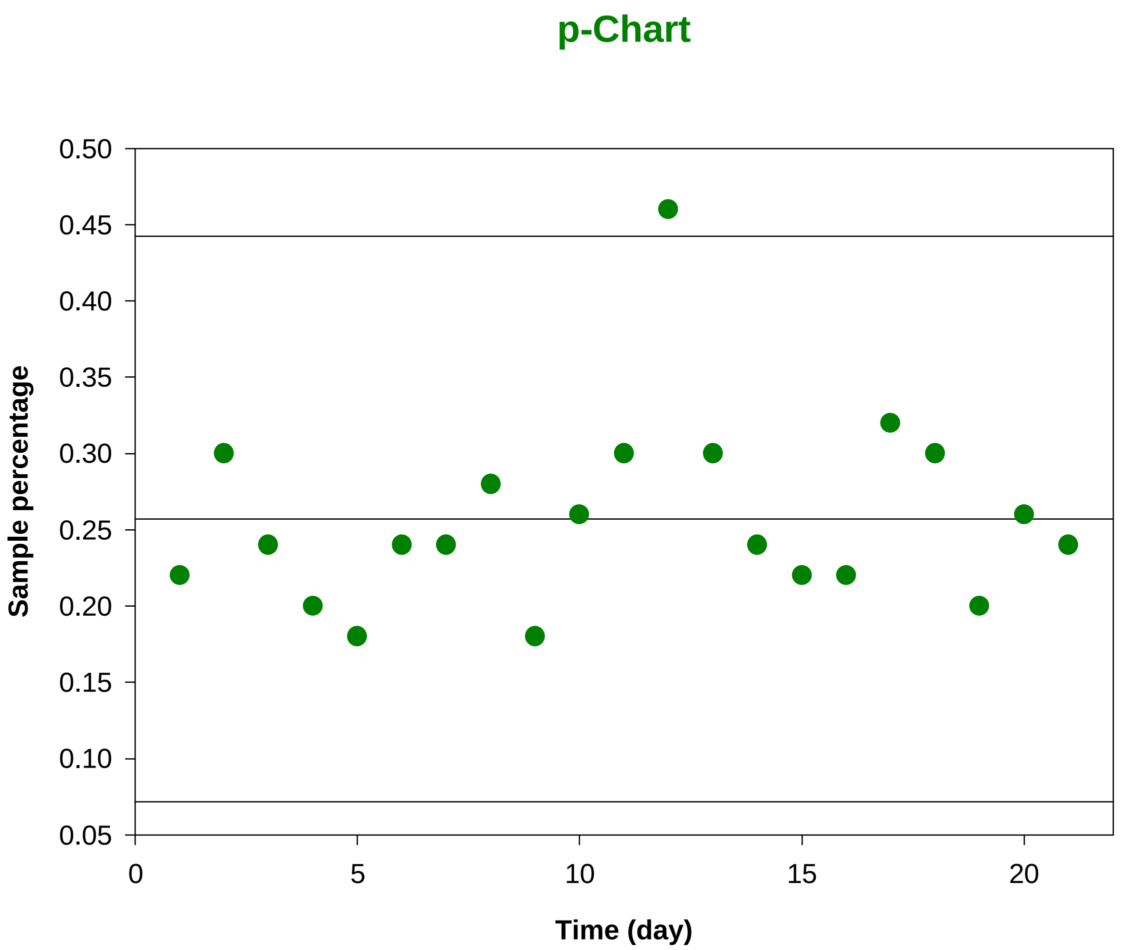
ESEMPIO

CARTE DI CONTROLLO PER VARIABILI (p-Chart)

Con riferimento ai dati di tabella si costruisca e si interpreti la p-Chart. Tutti i campioni hanno numerosità 50

Day N. Defective	1 11	2 15	3 12	4 10	5 9	6 12	7 12	8 14	9 9	10 13	11 15
Day N. Defective	12 23	13 15	14 12	15 11	16 11	17 16	18 15	19 10	20 13	21 12	

CL	0.257143
UCL	0.442571
LCL	0.071715



L’esame della carta evidenzia che il giorno 12 il processo è fuori controllo.

Non segni di presenza di tendenza non casuale.

Si rendono perciò necessari opportuni interventi atti a giustificare e/o correggere l’anomalia segnalata.