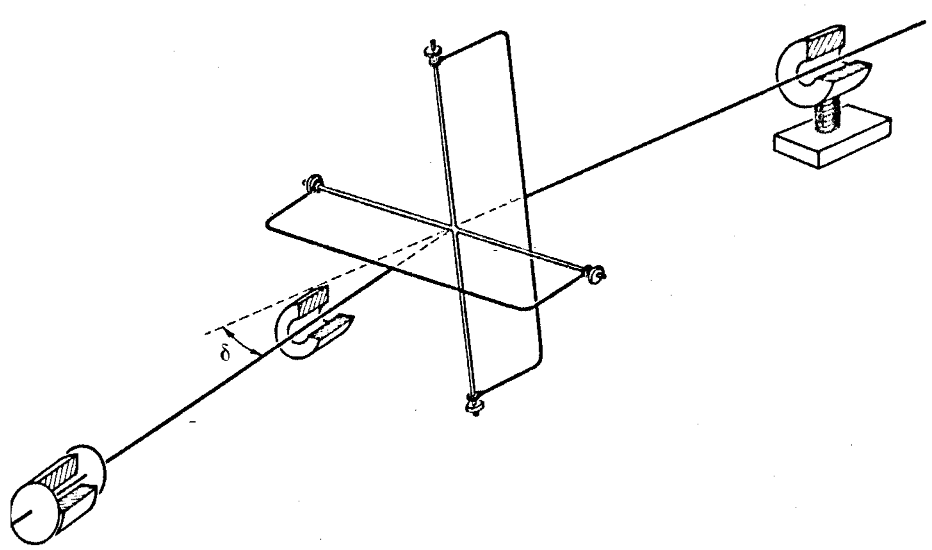
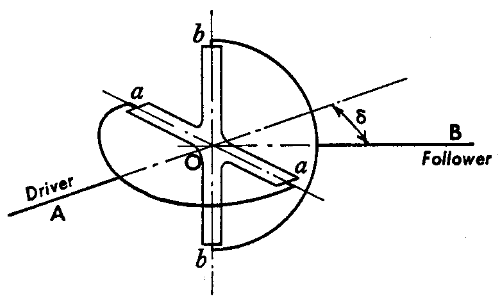
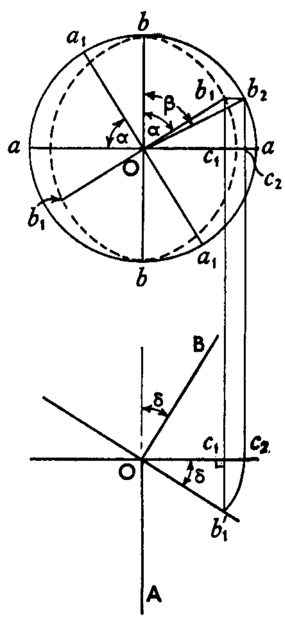
IL GIUNTO DI CARDANO

Il giunto di ***Cardano*** viene usato per collegare due alberi con assi concorrenti formanti fra loro un angolo generalmente diverso da zero.



Per effettuare lo studio cinematico del giunto si faccia riferimento alle viste in pianta e in prospetto della trasmissione.





Quando gli alberi ruotano, gli estremi ***aa*** della crociera si muoveranno nel piano frontale a descrivere una circonferenza, mentre gli estremi ***bb*** della crociera descriveranno un'ellisse (rappresentata con linea a tratti).
Se l'albero ***A*** ruota di un angolo α (da ***aa*** a $\boldsymbol{a_1 a_1}$), anche la proiezione di ***bb*** ruoterà di un angolo *a* fino a portarsi in $\boldsymbol{b_1 b_1}$. L'angolo *b* di rotazione dell'albero condotto ***B*** si ricava determinando la vera posizione di $\boldsymbol{b_1 b_1}$ (ovvero vista lungo l'asse di ***B***)

Il punto ***b₁*** sul piano frontale corrisponde, in pianta, al punto ***b₁'*** . Il punto ***b₁'*** viene successivamente ribaltato nel piano contenente ***aa*** (punto ***c₂***). La proiezione di ***c₂*** sul piano frontale determina il punto ***b₂*** permettendo la definizione dell'angolo *b*. Valgono allora le seguenti relazioni:

$$\tan a = \frac{oc_1}{b_1c_1} \qquad \tan b = \frac{oc_2}{b_2c_2} = \frac{oc_2}{b_1c_1}$$

$$\frac{\tan a}{\tan b} = \frac{oc_1}{oc_2} = \frac{oc_1}{ob_1'} = \cos d$$

$$\tan a = \tan b \cdot \cos d \qquad [1]$$

Derivando entrambi i membri della [1] rispetto al tempo si ricava la relazione tra le velocità degli alberi.

$$\sec^2 a \frac{da}{dt} = \sec^2 b \frac{db}{dt} \cos d$$

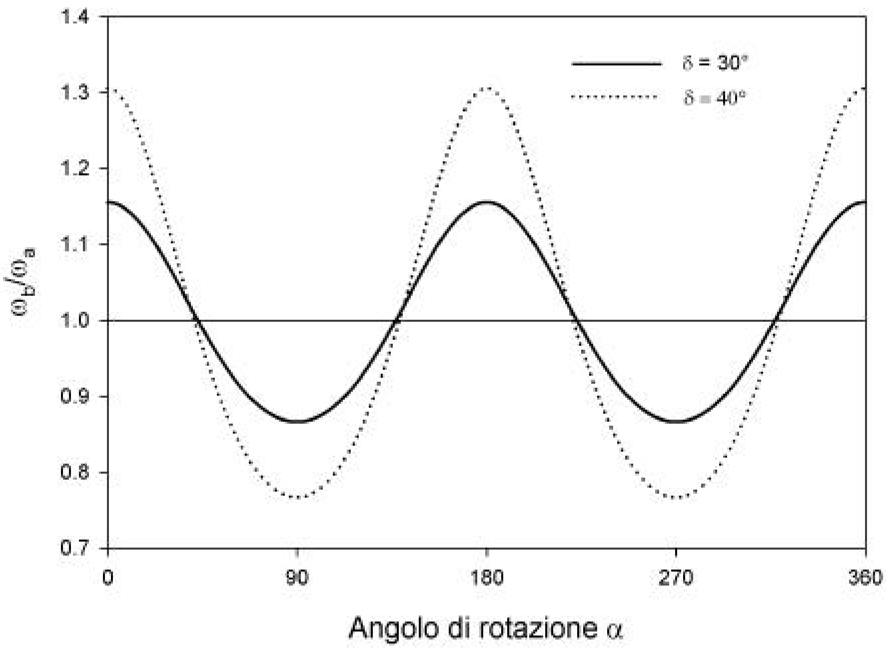
$$\sec^2 a \cdot w_a = \sec^2 b \cdot w_b \cdot \cos d$$

$$\sec^2 a \cdot w_a = (1 + \tan^2 b) \cdot \cos d \qquad \text{dalla [1] si ottiene}$$

$$\sec^2 a \cdot w_a = \left(1 + \frac{\tan^2 a}{\cos^2 d}\right) \cdot w_b \cdot \cos d$$

$$w_a = \frac{\left(\cos^2 d + \tan^2 a\right)}{\cos d} \cdot \cos^2 a \cdot w_b$$

$$\frac{w_b}{w_a} = \frac{\cos d}{1 - \sin^2 d \cdot \cos^2 a} \qquad [2]$$



Il rapporto ω_b/w_a ha un valore massimo pari a ***1/cosd*** che viene raggiunto quando ***cosa = ±1*** ovvero quando ***a*** vale 0, 180°, etc…
Il rapporto ω_b/w_a ha invece un valore minimo pari a ***cosd*** che viene raggiunto quando ***cosa = 0*** ovvero quando ***a*** vale 90, 270°, etc..

L'irregolarità periodica della trasmissione ***I*** , per w_a costante è pari a:

$$I = \frac{w_{b\max} - w_{b\min}}{w_{bmedio}} = \left(\frac{w_b}{w_a}\right)_{\max} - \left(\frac{w_b}{w_a}\right)_{\min} = \frac{1}{\cos d} - \cos d = \sin d \cdot \tan d$$

L'albero condotto e conduttore hanno la stessa velocità quando:

$$\frac{\cos d}{1 - \sin^2 d \cdot \cos^2 a} = 1$$

$$\cos^2 a = \frac{1 - \cos d}{\sin^2 d} = \frac{1}{1 + \cos d}$$

$$\tan^2 a = (1 + \cos d) \cdot \sin^2 a = \cos d$$

$$\tan a = \pm\sqrt{\cos d} \qquad [3]$$

Ci sono pertanto quattro angoli di rotazione in corrispondenza dei quali durante ciascun giro la velocità dell'albero condotto uguaglia quella dell'albero motore

Calcolo delle accelerazioni

Supponendo costante la velocità angolare w_a dell'albero motore, l'accelerazione dell'albero condotto vale:

$$\frac{dw_b}{dt} = \frac{da}{dt} \cdot \frac{\sin^2 d \cdot \cos d \cdot \sin 2a}{\left(1 - \sin^2 d \cdot \cos^2 a\right)^2} \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\frac{dw_b}{dt} = -w_a^2 \cdot \frac{\sin^2 d \cdot \cos d \cdot \sin 2a}{\left(1 - \sin^2 d \cdot \cos^2 a\right)^2} \qquad [4]$$

L'accelerazione dell'albero condotto si annulla per valori di ***a*** multipli di ***p/2*** e assume valori uguali e opposti per valori di ***a*** supplementari.

Il valore massimo dell'accelerazione si trova ponendo a zero la derivata prima della [4]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin 2a}{1 - \sin^2 d \cdot \cos^2 a}\right)^2 = 0$$

$$\left(1 - \sin^2 d \cdot \cos^2 a\right) \cdot \cos 2a = \sin^2 2a \cdot \sin^2 d$$

$$\left(1 - 0.5 \cdot \sin^2 d \left(1 + \cos 2a\right)\right) \cdot \cos 2a = \left(1 - \cos^2 2a\right) \cdot \sin^2 d$$

$$2\cos 2a - \sin^2 d \cdot \cos 2a - \sin^2 d \cdot \cos 2a = 2\sin^2 d - 2\sin^2 d \cdot \cos^2 2a$$

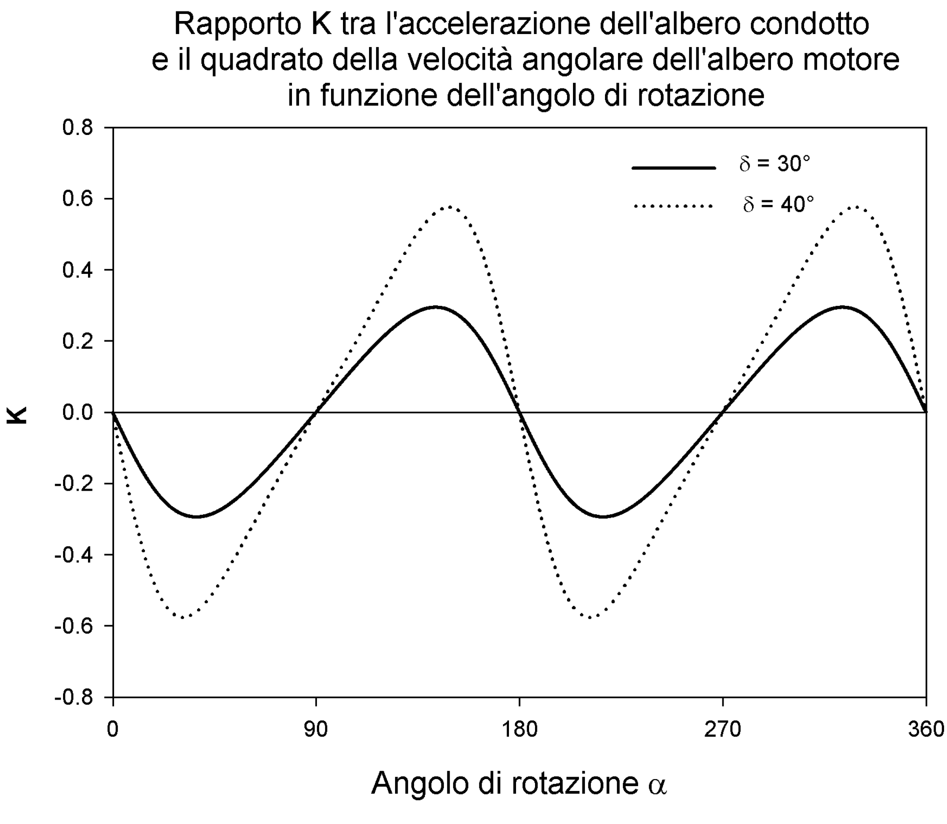
$$\cos 2a = \frac{\sin^2 d \cdot \left(2 - \cos^2 2a\right)}{2 - \sin^2 d} \qquad [5]$$

Facendo riferimento ai valori ai consueti valori di d (valori non superiori a 30°) la soluzione della [5] fornisce valori di a prossimi a 45°. In queste condizioni $\boldsymbol{cos^2 2a}$ è molto piccolo e può essere trascurato nei confronti di $\boldsymbol{2}$. La [5] pertanto può essere semplificata come di seguito proposto:

$$\cos 2a \simeq \frac{2\sin^2 d}{2-\sin^2 d} \qquad [6]$$

Ipotizzando che il valore massimo dell'accelerazione si ottenga, come è stato detto in precedenza, in corrispondenza di un angolo di rotazione a pari a 45°, tale massimo può essere immediatamente calcolato con la seguente relazione:

$$\left(\frac{dw_b}{dt}\right)_{\max} \simeq w_a^2 \frac{\sin^2 d \cdot \cos d}{\left(1-\frac{\sin^2 d}{2}\right)^2}$$



Bibliografia

G. Bongiovanni, G. Roccati	Giunti fissi, articolati, elastici e di sicurezza	Levrotto & Bella To
R. Giovannozzi	Costruzione di macchine vol. I	Patron
J.Hannah, R.C. Stephens	Mechanics of machines	Arnold